© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2005 г.

УДК 517.95

О некоторых величинах, связанных со смешанными граничными задачами для оператора Лапласа на треугольнике

ТОМИНА И.В., канд. физ.-мат. наук

Исследуются некоторые величины, выражаемые в терминах двойных тригонометрических рядов Фурье. Результаты этого исследования являются существенными для получения конкретных формул первого регуляризованного следа степени оператора Лапласа с потенциалом в случае смешанных граничных задач на равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Пусть $F=\{(x,y)\,|\,0\le y\le x\le \pi\}$ — прямоугольный равнобедренный треугольник в $\mathbf{R}^2$ со сторонами $l_1=\{(\pi,t)\,|\,0\le t\le\pi\}$, $l_2=\{(t,0)\,|\,0\le t\le\pi\}$, $l_3=\{(t,t)\,|\,0\le t\le\pi\}$ и границей $\partial F=l_1\cup l_2\cup l_3$.

Рассмотрим смешанную граничную задачу

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0 \text{ на } F,\\ r_j u+(1-r_j)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0 \text{ на } l_j\ (j=1,2,3),\end{cases}\qquad (1)$$

где $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^2$, ν — внутренняя нормаль к ∂F, $r_j\in\{0,1\}$. Введем упоря-доченный набор трёх неотрицательных целых чи-сел $I=(i_1,i_2,i_3)$, где $i_1=|r_2-r_1|$, $i_2=r_2$, $i_3=r_3$.

Очевидно, $i_j\in\{0,1\}$ $(j=1,2,3)$, $I\in\{0,1\}^3$ и $r_1=|i_2-i_1|$, $r_2=i_2$, $r_3=i_3$; $i_1=0$ тогда и только тогда, когда на катетах l_1 и l_2 заданы одинаковые граничные условия (Дирихле или Неймана); $i_2=0$ ($i_3=0$) в том и только том случае, когда на катете l_2 (на гипотенузе l_3) задано условие Неймана. Все 8 случаев $I=(i_1,i_2,i_3)\in\{0,1\}^3$ удобно занумеровать, переходя от двоичной системы счисления к деся-тичной: $I=I_s$, если $s=4i_1+2i_2+i_3$. Получаем случаи $I_0,I_1,\ldots,I_7$; задаче Дирихле соответствует $I_3=(0,1,1)$, задаче Неймана — случай $I_0=(0,0,0)$.

Для любого $s=\overline{0,7}$ вводим систему функций $U_s=\{u_{mn}(s)\,|\,(m,n)\in J_s\}$, где $u_{mn}(s)\equiv$

$$\equiv u_{mn}(x,y;s)=\sqrt{\nu_{mn}(i_1)}\cdot\frac{2}{\pi}\{\cos[(m+i_1/2)x-\pi i_2/2]\times$$
$$\times\cos[(n+i_1/2)y-\pi i_2/2]+(-1)^{i_3}\cos[(m+i_1/2)y-$$
$$-\pi i_2/2]\cos[(n+i_1/2)x-\pi i_2/2]\},$$

$J_s=\{(m,n)\in\mathbf{Z}^2\,|\,i_2(1-i_1)\le n\le m-i_3\}$, $\nu_{mn}(i_1)=\gamma_{m-n}\gamma_{m+i_1}\gamma_{n+i_1}$, $\gamma_m=1$ при $m\ne0$ и $\gamma_0=1/2$.

Известно [1], что $\forall s=\overline{0,7}$ U_s есть полная ортонормированная в $L^2(F)$ система, состоящая из собственных функций $u_{mn}(s)$ граничной задачи (1), соответствующих ее собственным числам $\lambda_{mn}(s)=(m+i_1/2)^2+(n+i_1/2)^2$, $(m,n)\in J_s$.

Всюду далее $n_0\equiv n_0(s)=i_2(1-i_1)$, $K=[0,\pi]^2$ — квадрат в $\mathbf{R}^2$, $\sigma[g]$ — двойной ряд Фурье функции $g(x,y)\in L^1(K)$ по полной ортогональной на K системе $\{\cos mx\cos ny\,|\,m,n\ge0\}$:

$$g(x,y)\sim\sum_{m,n\ge0}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g)\cos mx\cos ny,$$

$$a_{mn}(g)=\frac{4}{\pi^2}\iint_K g(x,y)\cos mx\cos ny\,dxdy.$$

Пусть $S(g;x,y)=S^{\text{круг}}(g;x,y)$ и $S^{\text{прям}}(g;x,y)$ — пределы соответственно круговых и прямоугольных частичных сумм двойного ряда Фурье $\sigma[g]$:

$$S(g;x,y)=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\substack{m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge0}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g)\cos mx\cos ny,\qquad (2)$$

$$S^{\text{прям}}(g;x,y)=\lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}}\sum_{m,n=0}^{M,N}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g)\cos mx\cos ny.$$

При $d\in\{\text{круг},\text{прям}\}$ функция $S^d(g;x,y)$ определена на множестве $D^d(g)$ d-сходимости ряда $\sigma[g]$; полагаем $D(g)\equiv D^{\text{круг}}(g)$.

Пусть $Q=\{g\in L^\infty(K)\,|\,g(x,y)=g(y,x)$ п.в. на $K\}=\{g\in L^\infty(K)\,|\,a_{mn}(g)=a_{nm}(g)\ \ \forall m,n\ge0\}$,

$Q_0(s)=\{g\in Q\,|\,\exists\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\nu_{mn}(i_1)a_{2m+i_1,2n+i_1}(g)\equiv$

$\equiv G(g;s)\in\mathbf{C}\}$. Суммирование по $\lambda_{mn}(s)\le\lambda$ означа-ет суммирование по всем $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, для которых $i_2\left(1-i_1\right)\le n\le m-i_3$ и $(m+i_1/2)^2+(n+i_1/2)^2\le\lambda.$.

При $(i,k)\in\{0,1\}^2$ для $g\in Q$ полагаем $A^i(g)=$

$$=\frac{1}{4}\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge0\end{cases}}[1+(-1)^{m+i}][1+(-1)^{n+i}]\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g);$$

$$B_i^k(g)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{2n+i}a_{2n+i,k(2n+i)}(g);$$

$$B_k(g)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n a_{n,kn}(g),$$

если эти величины существуют и конечны.

Нетрудно проверить, что если $\{b_{mn}\}_{m,n\ge0}$ — симметричная двойная числовая последователь-ность, то есть $b_{mn}=b_{nm}$ при всех $m,n\ge0$, то для любых $s=\overline{0,7}$ и $\lambda\ge0$ имеет место равенство

$$\sum_{\begin{cases}n_0\le n\le m-i_3\\ m^2+n^2\le\lambda\end{cases}}\gamma_{m-n}b_{mn}=\frac{1}{2}\sum_{\begin{cases}m,n\ge0\\ m^2+n^2\le\lambda\end{cases}}b_{mn}-\frac{i_3}{2}\sum_{0\le n\le\sqrt{\lambda/2}}b_{nn}-$$

$$-n_0\sum_{0\le n\le\sqrt{\lambda}}b_{0n}+\frac{(i_3+1)n_0}{2}b_{00}.\quad(3)$$

Предложение 1. Пусть $g\in Q$, $s=\overline{0,7}$, $\exists A^{i_1}(g)\in\mathbf{C}$, при $i_3=1$ $\exists B_1^{i_1}(g)\in\mathbf{C}$, при $n_0=1$ $\exists B_0^0(g)\in\mathbf{C}$. Тогда $g\in Q_0(s)$ и

$$G(g;s)=[A^{i_1}(g)-B_1^{i_1}(i_3g)-B_0^0(n_0g)+wg_{cp}]/2,$$

где $w=(1-i_1)(i_2+i_3+i_2i_3)$,

$$g_{cp}=\frac{1}{\pi^2}\iint_K g(x,y)dxdy=\frac{a_{00}(g)}{4}.$$

Доказательство. При $\lambda\ge0$ имеем

$$\sum_{\lambda_{mn}(s)\le\lambda}\nu_{mn}(i_1)a_{2m+i_1,2n+i_1}(g)=$$

$$=\sum_{\begin{cases}n_0\le n\le m-i_3\\ m^2+n^2\le4\lambda\end{cases}}\gamma_{m-n}\frac{[1+(-1)^{m+i_1}][1+(-1)^{n+i_1}]}{4}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g).$$

Остается применить (3) и затем перейти к пределу при $\lambda\to\infty$, учитывая условия предложения 1.

Пусть $l_5=\{(\pi-t,t)\,|\,0\le t\le\pi/2\}$, $X_0=\{(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)\}$, $X_1=l_3\bigcup l_5$, $X_2=l_1\bigcup l_2$, $X_3=\partial F\bigcup l_5$; $X_{s\,0}=X_s$ при $s=\overline{0,3}$, $X_{01}=X_0$, $X_{11}=X_{31}=X_3$, $X_{21}=\partial F$. Для $g\in Q$, $X\subset\mathbf{R}^2$ и $d\in\{\text{круг},\ \text{прям}\}$ пишем $g\in Q^d[X]$, если при $d=\text{круг}$ круговые, а при $d=\text{прям}$ прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье $\sigma[g]$ равномерно сходятся на множестве X.

Предложение 2. Пусть $g\in Q$, $i\in\{0,1\}$, $d\in\{\text{круг},\ \text{прям}\}$. Тогда:

1) если $X_0\subset D(g)$, то

$$A^i(g)=[S(g;0,0)+(-1)^i2S(g;\pi,0)+S(g;\pi,\pi)]/4;$$

2) если $g\in Q^d[X_{2-k}]$, где $k\in\{0,1\}$, то

$$B_k^i(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[S^d(g;t,kt)+$$

$$+(-1)^iS^d(g;\pi+k(t-\pi),k(\pi-2t)+t)]dt;$$

3) если $g\in Q^d[l_{k+2}]$, то

$$B_k(g)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}S^d(g;t,kt)dt.$$

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из (2) с учетом условия $g\in Q$.

При $d=\text{круг}$ согласно условию утверждения 2) следующие предельные соотношения выполня-ются равномерно по $t\in[0,\pi]$:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge0\end{cases}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g)\cos\ mt\cos\ knt=S(g;t,kt),\ (4)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge0\end{cases}}(-1)^{(1-k)m+kn}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(g)\cos\ mkt\cos\ nt=$$

$$=S(g;\pi+k(t-\pi),k(\pi-2t)+t).\quad(5)$$

Интегрируя под знаком предела в (4) и (5) по $t\in[0,\pi]$, получаем соответственно

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n a_{kn,n}(g)=\int_0^{\pi}S(g;t,kt)dt,$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\gamma_m a_{m,km}(g)=\int_0^{\pi}S(g;\pi+k(t-\pi),k(\pi-2t)+t)dt.$$

Поскольку $a_{km,m}(g)=a_{m,km}(g)$, то отсюда следует справедливость утверждений 2) и 3) при $d=\text{круг}$.

В случае $d=\text{прям}$ утверждения 2) и 3) доказываются аналогично.

Пусть $p(x,y)$ — ограниченная измеримая на F функция, $\hat p(x,y)\equiv p(x+y,y-x)$ на треуголь-нике $F_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le y\le\pi-x\}$,

$\tilde{p}(x,y)$ — про-должение $p(x,y)$ с F на K, симметричное относи-тельно диагонали l_3, то есть $\tilde{p}(x,y)=p(x,y)$ на F и $\tilde{p}(x,y)=p(y,x)$ на $K\setminus F$; $p^*(x,y)$ — продолже-ние $\hat{p}(x,y)$ с F_1 на K, симметричное относитель-но диагоналей l_3 и $l_4=\{(t,\pi-t)\,|\,0\le t\le\pi\}$, то есть $p^*(x,y)=p^*(y,x)=p^*(\pi-x,\pi-y)=p^*(\pi-y,\pi-x)$ для всех $(x,y)\in K$ и $p^*(x,y)=\hat{p}(x,y)$ на F_1. Очевидно, что $\tilde{p}\in Q$ и $p^*\in Q$.

Нетрудно проверить, что при всех $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $u=x+y$, $v=y-x$, $\alpha=(a+b)/2$, $\beta=(a-b)/2$ справедливо равенство

$$\cos ax\cos by+\cos ay\cos bx= \\ =\cos\alpha u\cos\beta v+\cos\alpha v\cos\beta u. \quad (6)$$

Предложение 3. 1) $a_{mn}(p^*)=0$ при $(-1)^{m+n}=-1$;

2) $a_{mn}(p^*)=a_{ij}(\tilde{p})$ при $(-1)^{m+n}=1$, $m\ge n\ge 0$, $i=(m+n)/2$, $j=(m-n)/2$;

3) при $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\lambda\ge 0$ имеем

$$\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge 0\end{cases}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(p^*)\cos mx\cos ny= \\ =\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda/2\\ m,n\ge 0\end{cases}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(\tilde{p})\cos mu\cos nv, \quad (7)$$

где $u=x+y$, $v=y-x$;

4) $D(p^*)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,|\,(x+y,y-x)\in D(\tilde{p})\}$ и $S(p^*;x,y)\equiv S(\tilde{p};x+y,y-x)$;

5) $p^*\in Q[X]$ в том и только том случае, когда $\tilde{p}\in Q[Y]$; здесь $X\subset\mathbf{R}^2$, $Y=\{(x+y,y-x)\,|\,(x,y)\in X\}$.

Доказательство. 1) Из определения $p^*(x,y)$ следует

$$a_{mn}(p^*)=[1+(-1)^{m+n}]\cdot\frac{4}{\pi^2}\iint_{F_1}p(x+y,y-x)\times \\ \times(\cos mx\cos ny+\cos my\cos nx)\,dxdy. \quad (8)$$

Отсюда при $(-1)^{m+n}=-1$ имеем $a_{mn}(p^*)=0.$

2) Пусть $m\ge n\ge 0$, $(-1)^{m+n}=1$, $i=(m+n)/2$, $j=(m-n)/2$. Тогда, используя (6), с помощью перехода в двойном интеграле (8) к новым переменным интегрирования u,v, где $u=x+y$, $v=y-x$, получаем $a_{mn}(p^*)=a_{ij}(\tilde{p})$.

3) Пусть $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\lambda\ge 0$. Тогда справедливы следующие равенства

$$\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge 0\end{cases}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(p^*)\cos mx\cos ny\overset{\hat{1}}{=}$$

$$\overset{\hat{1}}{=}\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m,n\ge 0\\ (-1)^{m+n}=1\end{cases}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(p^*)\cos mx\cos ny\overset{\hat{2}}{=}$$

$$\overset{\hat{2}}{=}\sum_{\begin{cases}m^2+n^2\le\lambda\\ m\ge n\ge 0\\ (-1)^{m+n}=1\end{cases}}\gamma_m\gamma_n a_{mn}(p^*)[\cos mx\cos ny+\cos my\cos nx]-$$

$$-\sum_{0\le n\le\sqrt{\lambda/2}}\gamma_n^2 a_{nn}(p^*)\cos nx\cos ny\overset{\hat{3}}{=}$$

$$\overset{\hat{3}}{=}\sum_{\begin{cases}i^2+j^2\le\lambda/2\\ i\ge j\ge 0\end{cases}}\gamma_{i+j}\gamma_{i-j}a_{ij}(\tilde{p})[\cos iu\cos jv+\cos iv\cos ju]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{0\le i\le\sqrt{\lambda/2}}\gamma_i^2 a_{i0}(\tilde{p})[\cos iu+\cos iv]\overset{\hat{4}}{=}$$

$$\overset{\hat{4}}{=}\sum_{\begin{cases}i^2+j^2\le\lambda/2\\ i\ge j\ge 0\end{cases}}\gamma_i\gamma_j a_{ij}(\tilde{p})[\cos iu\cos jv+\cos iv\cos ju]-$$

$$-\sum_{0\le i\le\sqrt{\lambda}/2}\gamma_i^2 a_{ii}(\tilde{p})\cos iu\cos iv\overset{\hat{5}}{=}\sum_{\begin{cases}i^2+j^2\le\lambda/2\\ i,j\ge 0\end{cases}}\gamma_i\gamma_j a_{ij}(\tilde{p})\cos iu\cos jv.$$

Равенство $\hat{1}$ имеет место в силу 1). Соотношение $\hat{2}$ выполняется, поскольку $a_{mn}(p^*)=a_{nm}(p^*)$. Равенство $\hat{3}$ получается с помощью перехода к новым переменным суммирования $i=(m+n)/2$, $j=(m-n)/2$ на основе 2) и (6). Равенство $\hat{4}$ нетрудно проверить, сравнивая коэффициенты при $a_{ij}(\tilde{p})$ в обеих его частях; при этом удобно рас-смотреть отдельно четыре случая: a) $i>j>0$; b) $i>j=0$; c) $i=j>0$ d) $i=j=0$. И, наконец, по-следнее равенство $\hat{5}$ следует из формулы $a_{ij}(\tilde{p})=a_{ji}(\tilde{p})$. Утверждения 4) и 5) устанавлива-ются с помощью предельного перехода при $\lambda\to\infty$ в равенстве (7).

Предложение 4. 1) Если $\exists A^{i_1}(p^*)\in\mathbf{C}$, при $i_3=1$ $\exists B_0^{i_1}(\tilde{p})\in\mathbf{C}$ и при $n_0=1$ $\exists B_1(\tilde{p})\in\mathbf{C}$, то $p^*\in Q_0(s)$ и

$$G(p^*;I)=[A^{i_1}(p^*)-B_o^{i_1}(i_3\tilde{p})-B_1(n_0\tilde{p})+wp_{cp}]/2, \quad (9)$$

где $p_{cp} = \frac{2}{\pi^2} \iint\limits_F p(x,y)dxdy$.

2) Если $\{(0,0),(\pi,\pi)\} \subset D(\tilde{p})$, при $i_3 = 1$ $\tilde{p} \in Q^d[l_1 \bigcup l_2]$ и при $n_0 = 1$ $\tilde{p} \in Q^d[l_3]$, где $d = \text{круг}$ или $d = \text{прям}$, то $p^* \in Q_0(I)$ и

$$G(p^*;I) = \frac{1}{2}[S(\tilde{p};0,0) + (-1)^{i_1} S(\tilde{p};\pi,\pi)] - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi [S^d(i_3\tilde{p};t,0) +$$

$$+(-1)^{i_1} S^d(i_3\tilde{p};\pi,t) + 2S^d(n_0\tilde{p};t,t)]dt + \frac{1}{2}wp_{cp}. \quad (10)$$

Доказательство. В силу утверждения 2) предложения 3 имеем $B_1^{i_1}(p^*) = B_0^{i_1}(\tilde{p})$ и $B_0^0(p^*) = B_1(\tilde{p})$, поэтому из предложения 1 получа-ем справедливость утверждения 1).

Пусть выполнены условия утверждения 2). Тогда, очевидно, выполнены условия утверждения 1), следовательно $p^* \in Q_0(I)$. С помощью предложений 2 и 3 находим:

$$A^{i_1}(p^*) = \frac{1}{2}[S(\tilde{p};0,0) + (-1)^{i_1} S(\tilde{p};\pi,\pi)],$$

$$B_0^{i_1}(\tilde{p}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [S^d(\tilde{p};t,0) + (-1)^{i_1} S^d(\tilde{p};\pi,t)]dt,$$

$$B_1(\tilde{p}) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi S^d(\tilde{p};t,t)dt.$$

Отсюда и из (9) следует формула (10).

Результаты настоящей статьи приведены ранее в [2].

Список литературы

1. **Томина И.В.** Об одном способе построения ортонормированных полных систем на прямоугольном равнобедренном треугольнике // Математика и ее приложения. — 2004. — №1. — С. 119-122.

2. **Томина И.В.** Регуляризованные следы степени оператора Лапласа с потенциалом на треугольниках в случае смешанных граничных условий: Дис... канд. физ.-мат. наук. — Владимир, ВГПУ, 1995. — 98 с.