

УДК 534.24.001.573

## Модификации зонального метода для решения задач радиационного теплообмена: основные положения

Бухмиров В.В., Крупенников С.А., доктора техн. наук, Солнышкова Ю.С., асп.

**Рассмотрены основные модификации зонального метода для решения задач радиационного и сложного теплообмена. Сделаны предварительные выводы о применимости различных модификаций зонального метода для решения прикладных задач теплопереноса.**

*Ключевые слова:* математическое моделирование, теплообмен, модификации зонального метода, радиационные характеристики.

## Modification of zonal method for the solution of radiative heat transfer problems: main position

Buhmirov V.V., Krupennikov S.A., Solnyshkova U.S.

**There are given different modifications of zonal method for the solution of the radiative and complex heat transfer problems. Authors made preliminary findings about applicability different modifications of zonal method for the solution of applied problems of heat transfer.**

Keywords: mathematical modeling, heat exchange, modifications of the zonal method, features to radiation.

В настоящее время востребовано эффективное математическое моделирование процессов радиационного и сложного теплообмена в теплотехнических и теплотехнологических агрегатах. Математическая модель, описывающая физико-химические процессы с заданной точностью, позволит в значительной степени уменьшить затраты на экспериментальные исследования.

Строгое математическое описание процессов радиационного теплообмена приводит к появлению системы интегральных уравнений, для решения которой применяют различные численные методы. Необходимым этапом расчета является дискретизация системы (разбиение на конечные участки), которую, однако, можно выполнить уже на начальном этапе постановки задачи. Разбивать систему на участки следует таким образом, чтобы в каждом из них температуру и радиационные характеристики можно было считать постоянными. Методы расчета, в которых используется данный принцип, получили название зональных.

Идея зонального метода заключается в условном разбиении системы, в которой происходит теплообмен, на объемные (в количестве  $n$ ) и поверхностные (в количестве  $m$ ) зоны. Общее число зон, таким образом, составляет  $l = m + n$ . Для каждой зоны записывают уравнение баланса энергии с учетом теплообмена со всеми остальными зонами. Обязательным условием является постоянство теплофизических и радиационных характеристик среды в пределах каждой зоны. Так, для поверхностных зон неизменными считают поглощательную способность  $A_i$ , степень черноты  $\varepsilon_i$ , температуру  $T_i$  и плотность потока падающего излучения  $q_i^{пад}$ . Для объемных зон (имеющих объем  $V_i$  и ограниченную воображаемой поверхностью  $F_i$ ) постоянны температура среды  $T_i$  и другие факторы, оказывающие влияние на интенсивность теп-

лообмена (например, содержание поглощающе-излучающих компонентов).

Зоны также классифицируют в зависимости от входных параметров (заданных величин). Различают зоны I-го рода (задана температура), зоны II-го рода (задан поток результирующего излучения  $Q_i^p$ ) и зоны III-го рода, для которых записывают уравнения баланса энергии, связывающие результирующие тепловые потоки и температуры.

Решение задачи теплообмена для зон каждого из трех родов сводится к определению следующих характеристик:

- потоков результирующего излучения (для зон I-го рода);
- температур или потоков собственного излучения  $Q_{соб}$  (для зон II-го рода);
- потоков результирующего излучения и температур (для зон III рода).

В случае появления зон III-го рода (сложный теплообмен) расчет зональных температур и тепловых потоков выполняют методом итерации. В качестве итерационного метода можно использовать метод Ньютона, а итерационными параметрами могут являться как зональные температуры, так и зональные потоки результирующего излучения.

При решении задач внешнего теплообмена возможно применение различных модификаций зонального метода. Существуют классический, резольвентный, модифицированный резольвентный зональные методы [1]. В каждом из вышеперечисленных методов выбраны потоки эффективного  $Q_k^{эфф}$  и собственного  $Q_k^{соб}$  излучения для классического и резольвентного зональных методов соответственно. В модифицированном резольвентном зональном методе записывают уравнения, связывающие потоки падающего излучения с потоками собственного излучения.

При решении задач внешнего теплообмена допускают, что для каждой зоны поглощательная

способность равна степени черноты, а отражательная способность поверхностных зон принимает вид  $R_i = 1 - \varepsilon_i$ . Кроме того, считают, что все радиационные характеристики (степень черноты и обобщенные угловые коэффициенты излучения) не зависят от неизвестных температур зон II-го и III-го родов, а собственное и эффективное излучение поверхностных зон диффузное.

Зональные методы применимы для расчета как чисто радиационного, так и сложного теплообмена.

Ниже представлен общий вид уравнений теплового баланса для различных модификаций зонального метода.

**Классический зональный метод.** Для классического зонального метода уравнения теплового баланса представляют собой соотношения вида

$$Q_i^{пад} = \sum_k Q_k^{эфф} \cdot \Psi_{ki}, \quad i = 1 \dots I, \quad (1)$$

где  $\Psi_{ki}$  – обобщенные угловые коэффициенты излучения, определяющие вклад потока эффективного излучения  $k$ -й зоны в поток, падающий на  $i$ -ю зону с учетом поглощения части излучения средой.

Расчет задач чисто радиационного теплообмена проводят в два этапа. На первом определяют потоки эффективного излучения для всех зон, на втором – по явным формулам находят потоки результирующего излучения (для зон I-го рода) и потоки собственного излучения (для зон II-го рода). Уравнения для определения искомых потоков в явном виде имеют следующий вид:

- для поверхностных зон I-го рода

$$Q_i^p = (\varepsilon_i Q_i^{эфф} - Q_i^{соб}) / R_i; \quad (2)$$

- для поверхностных зон II-го рода

$$Q_i^{соб} = \varepsilon_i Q_i^{эфф} - R_i Q_i^p; \quad (3)$$

- для объемных зон I-го рода

$$Q_i^p = \varepsilon_i \sum_k Q_k^{эфф} \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{соб}; \quad (4)$$

- для объемных зон II-го рода

$$Q_i^{соб} = Q_i^{эфф}. \quad (5)$$

Расчет сложного теплообмена (относительно потоков эффективного излучения) дополняют уравнениями, содержащими неизвестные температуры. Так как уравнения, связывающие потоки эффективного излучения с температурами, необходимо решать совместно с соотношениями, записанными для поверхностных и объемных зон III-го рода, то вычисления проводят с использованием метода итерации.

Число решаемых уравнений для данного метода в случае радиационного теплообмена составляет  $I$ .

**Резольвентный зональный метод.** Для данного метода уравнение теплового баланса принимает вид

$$Q_i^{пад} = \sum_k Q_k^{соб} \cdot \Psi_{ki}, \quad I = 1 \dots I, \quad (6)$$

где  $\Psi_{ki}$  – разрешающие обобщенные угловые коэффициенты, характеризующие вклад потока эффективного излучения  $k$ -й зоны в поток, падающий на  $i$ -ю зону с учетом отражения излучения поверхностными зонами и поглощения части излучения средой. Физический смысл обобщенных угловых

коэффициентов выражается следующей системой уравнений:

$$\Psi_{ki} = \Psi_{ki} + \sum_j \Psi_{kj} \cdot R_j \cdot \Psi_{ji}, \quad (7)$$

где  $R_j$  – отражательная способность  $j$ -й зоны.

Выражение (7) составляет основу математической модели радиационного теплообмена в рамках резольвентного зонального метода [1] наряду с уравнением

$$Q^p = Q^{пад} A - Q. \quad (8)$$

Соотношение (7) полностью согласуется со смыслом разрешающих угловых коэффициентов. Оно учитывает вклад собственного излучения  $k$ -й зоны, непосредственно достигающей  $i$ -й зоны, и долю излучения, попадающую с  $k$ -й зоны на некоторую  $j$ -ю поверхностную зону, отражающуюся от нее и затем всеми возможными путями достигающую  $i$ -й зоны.

Следует отметить, что для расчета разрешающих угловых коэффициентов необходимо знать отражательные способности каждой из поверхностных зон. Если отражательные способности зависят от температуры (подобные случаи могут возникнуть в зонах II-го рода), то расчет ведут методом итераций. Для этого задают приближенные значения отражательной способности каждой зоны. Затем решают задачу по определению температур поверхностных зон и уточняют значения  $R_j$ , при необходимости выполнив несколько итераций.

Задачи радиационного теплообмена рассчитываются в два этапа. После определения разрешающих угловых коэффициентов излучения определяют потоки собственного излучения для зон II-го рода по формулам вида

$$\sum_k Q_k^{соб} (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki}) - Q_i^p = 0, \quad (9)$$

где  $\delta_{ki}$  – символ Кронекера.

Затем находят потоки результирующего излучения для зон I-го рода по формулам

$$Q_i^p = \sum_k Q_k^{соб} (\Psi_{ki} \varepsilon_i - \delta_{ki}). \quad (10)$$

Задачи сложного теплообмена с использованием данной модификации зонального метода решают, вводя коэффициенты радиационного теплообмена  $a_{ki} = \varepsilon_k \sigma F_k (\Psi_{ki} \varepsilon_{ki} - \delta_{ki})$ . Подставляя их в уравнение (9), получаем выражения для расчета температур:

- для зон II-го рода

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 - Q_i^p = 0; \quad (11)$$

- для зон III-го рода

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^o = 0. \quad (12)$$

Число решаемых уравнений в случае радиационного теплообмена для резольвентного зонального метода составляет  $I + I_2$ .

**Модифицированный резольвентный зональный метод.** Для модифицированного резольвентного зонального метода записывается система уравнений следующего вида:

$$Q_k = \begin{cases} Q_k^{cob}, k = 1 \dots l_1, l_2 + 1 \dots l_3, \\ -Q_k^p, k = l_1 \dots l_1 + l_2, \end{cases} \quad (13)$$

где  $l_1$  – количество зон I-го рода;  $l_2$  – количество зон II-го рода;  $l_3$  – количество зон III-го рода.

Согласно этому методу, в расчет вводят так называемые модифицированные угловые коэффициенты излучения, которые находят решением следующей системы уравнений:

$$Z_{ki} = \Psi_{ki} + \sum_j \Psi_{kj} \cdot P_j \cdot Z_{ji}, \quad (14)$$

где  $P_k = R_k$  для зон I-го и II-го рода;  $P_k = 1$  для поверхностных зон II-го рода;  $P_k = A_k$  для объемных зон II-го рода.

После определения модифицированных разрешающих угловых коэффициентов излучения расчет результирующих и собственных тепловых потоков проводят по явным формулам:

- для зон I-го рода

$$Q_i^p = \varepsilon_i \sum_k Q_k \cdot Z_{ki} - Q_i^{cob}; \quad (15)$$

- для зон II-го рода

$$Q_i^{cob} = \varepsilon_i \sum_k Q_k \cdot Z_{ki} - Q_i^p. \quad (16)$$

При расчете сложного теплообмена вводят модифицированные коэффициенты теплообмена  $a_{ki} = \varepsilon_k \sigma_0 F_k (Z_{ki} \varepsilon_{ki} - \delta_{ki})$ . В итоге для зон III-го рода получаем

$$\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=l_1+l_2} Q_k + \sum_{k=l_1+l_2+1}^l (a_{ki} T_k^4 + h_{ki} T_k) + h_i^o = 0. \quad (17)$$

Затем, решив систему зональных уравнений методом Ньютона по формулам (15) и (16), находим потоки результирующего излучения для зон I-го рода и потоки собственного излучения для зон II-го рода.

При решении задач сложного теплообмена возникает необходимость учета конвективных и кондуктивных тепловых потоков. В этом случае записывают уравнение вида

$$Q_i^p + \sum_k h_{ki} \cdot T_i + h_i^o = 0, \quad (18)$$

где  $h_{ki}$ ,  $h_i^o$  – коэффициенты, определяющие конвективные и кондуктивные тепловые потоки соответственно.

Бухмиров Вячеслав Викторович,  
Ивановский государственный энергетический университет,  
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретических основ теплотехники,  
e-mail: [buhmirov@tot.ispu.ru](mailto:buhmirov@tot.ispu.ru)

Крупенников Сергей Алексеевич,  
Московский институт стали и сплавов,  
доктор технических наук, профессор,  
e-mail: [buhmirov@tot.ispu.ru](mailto:buhmirov@tot.ispu.ru)

Солнышкова Юлия Сергеевна,  
Ивановский государственный энергетический университет,  
аспирант кафедры теоретических основ теплотехники,  
e-mail: [umc\\_rier@ispu.ru](mailto:umc_rier@ispu.ru)

Число решаемых уравнений в данном случае равно  $l$ .

Многие ученые считают, что наиболее эффективным является резольвентно-зональный метод. Однако, как было отмечено выше, число уравнений, которые необходимо решить в случае чисто радиационного теплообмена, для классического зонального метода составляет  $l$ , для резольвентно-зонального метода –  $l + l_2$ , для модифицированного резольвентно-зонального метода –  $l$  [2]. Таким образом, в этом случае применение классического зонального метода с точки зрения его эффективности, по сравнению с резольвентным, является оправданным. В случае сложного теплообмена решение поставленной задачи классическим методом осуществимо при выполнении достаточно громоздких вычислений, а резольвентный метод является более эффективным в связи с существенным уменьшением числа зональных уравнений.

## Заключение

Выбор модификации зонального метода зависит от того, зоны какого рода преобладают в системе. Для зон I-го рода наиболее эффективен классический зональный метод. При доминировании зон II-го рода для расчета процессов теплообмена выбираем модифицированный резольвентно-зональный метод (случай расчета температурных полей от электрических нагревательных устройств). Для расчета задач сложного теплообмена (преобладание зон III-го рода) наиболее эффективным является резольвентно-зональный метод.

## Список литературы

1. Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А. Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: Учебник для вузов. – М.: Металлургия, 1990.
2. Повышение эффективности зональных методов расчета радиационного и сложного теплообмена / В.В. Бухмиров, С.А. Крупенников, Д.В. Ракутина, Ю.С. Солнышкова // Тез. докл. VI Минского междунар. форума по тепло- и массообмену, 19–23 мая 2008 г. – 2008. – С. 193–194.