

Новый критерий статической устойчивости электроэнергетической системы с математической моделью в форме алгебро-дифференциальных уравнений

Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., доктора техн. наук

Описан новый итерационный критерий статической устойчивости ЭЭС, заданной в алгебро-дифференциальной форме. Критерий построен на основе итерационного алгоритма вычисления обобщенной матричной сигнум-функции. В качестве примера рассмотрена задача анализа статической устойчивости модели ОЭС Центра, заданной в форме Коши и в алгебро-дифференциальной форме.

Ключевые слова: линеаризация уравнений, математическая модель, матричная сигнум-функция, статическая устойчивость.

The new criterion to steady-state stability of the electroenergy system with mathematical model in the form algebra-differential equations

Misrihanov M.SH., doctor tehn. sciences, Ryabchenko V.N., doctor tehn. sciences

It is described new iteration criterion to steady-state stability EES, given in algebra-differential form. The criterion is built on base iteration algorithm of the calculation generalised matrix sign-functions. As example is considered problem of the analysis to steady-state stability to models OES Centre, given in the form Koshi and in algebra-differential form.

Keywords: linearization of the equations, mathematical model, matrix sign-function, steady-state stability.

Введение. В электроэнергетических системах (ЭЭС) проблема анализа статической устойчивости нормальных и послеаварийных режимов занимает одно из центральных мест [1, 2]. В качестве основного объекта практических расчетов выступает линеаризация нелинейной алгебро-дифференциальной математической модели ЭЭС:

$$\dot{x} = f(x, y, u); \quad (1)$$

$$0 = g(x, y, u), \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор переменных состояния; $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор параметров; $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор входных воздействий; $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ – нелинейные векторные функции; \mathbb{R} – множество действительных чисел. Вид векторных функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ определяется математическими моделями электрической сети и ее элементов (генераторов, трансформаторов, линий электропередачи, накопителей энергии и т. д.).

Стандартный подход к линеаризации (1), (2) связан с процедурой разложения в ряд Тейлора нелинейной векторной функции в малой окрестности установившегося режима ЭЭС. В результате линеаризации получается следующая аппроксимация:

$$f(x, y, u) = f(x_0, y_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} \Delta u, \quad (3)$$

$$g(x, y, u) = g(x_0, y_0, u_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} \Delta y + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} \Delta u, \quad (4)$$

где нижний индекс 0 обозначает установившийся режим ЭЭС; Δx , Δy , Δu – отклонения соответствующих векторов:

$$\Delta x = x - x_0 \doteq x' \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$$\Delta y = y - y_0 \doteq y'' \in \mathbb{R}^{n_y},$$

$$\Delta u = u - u_0 \doteq u \in \mathbb{R}^{n_u}.$$

Линеаризация уравнений ЭЭС в точке установившегося (послеаварийного) режима дает алгебро-дифференциальные уравнения:

$$\dot{x}' = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} x' + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} y'' + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} u; \quad (5)$$

$$0 = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} x' + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} y'' + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ u=u_0}} u. \quad (6)$$

При формальной обратимости матрицы $\partial g / \partial y$ уравнения (5), (6) могут быть преобразованы к форме Коши (форме пространства состояний):

$$\dot{x}' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} \right) x' + \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial u} \right) u. \quad (7)$$

Если матрица $\partial g / \partial y$ вырождена, то уравнения (7) не существует. Однако даже в случае обратимости $\partial g / \partial y$ в практических расчетах на

первый план выступает проблема обусловленности этой матрицы.

Напомним, что число обратимости матрицы $\text{cond}(\cdot)$ является отношением максимального сингулярного числа σ_{\max} матрицы к ее минимальному сингулярному числу σ_{\min} [3]. При

$$\text{cond}(\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}) = \frac{\sigma_{\max}(\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y})}{\sigma_{\min}(\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y})} \gg 1 \quad (8)$$

матрица $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}$ близка к вырожденности и математическая модель (7) становится чрезвычайно чувствительной («жесткой») по отношению к малым ошибкам вычислений и вариациям параметров.

Другими словами, математическая модель (7) в случае справедливости неравенства (8) или приближенного равенства

$$\det(\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}) \approx 0 \quad (9)$$

является некорректной по А.Н. Тихонову [4].

Если не принимать дополнительных мер, то все вычисления (анализ статической устойчивости, анализ управляемости и наблюдаемости и др.) с использованием матриц

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \quad (10)$$

будут приводить к серьезным ошибкам. В качестве одной из таких мер можно рассматривать процедуру предобуславливания матрицы [5, 6]. Однако в общем случае данный метод наталкивается на ряд существенных трудностей [7]. Не строго говоря, улучшение обусловленности матрицы $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{y}$ будет сопровождаться ухудшением обусловленности произведения матриц

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}},$$

а значит, и матриц (10).

Альтернативой является использование в расчетах исходной линеаризованной модели (5), (6).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad n = n_x + n_y; \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times \nu},$$

где \mathbf{I}_{n_x} – единичная матрица размера $n_x \times n_x$.

Тогда модель (5), (6) можно переписать в виде

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}. \quad (13)$$

В современной математической теории систем линейную модель (13) называют линейной

дескрипторной (linear descriptor system), линейной сингулярной (linear singular system), а также линейной алгебро-дифференциальной системой (linear algebraic differential system).

Сразу же заметим, что асимптотическая устойчивость линейной алгебро-дифференциальной системы (13) практически никак не связана с асимптотической устойчивостью матрицы \mathbf{A} . Точнее, только при $\mathbf{E} = \mathbf{I}_n$ устойчивость этой системы определяется устойчивостью (гурвицевостью) матрицы \mathbf{A} . При обратимой матрице \mathbf{E} для асимптотической устойчивости (13) необходима и достаточна гурвицевость матриц $\mathbf{E}^{-1} \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathbf{E}^{-1}$ [5].

Рассматривая в контексте алгебро-дифференциальных систем задачу определения статической (асимптотической) устойчивости ЭЭС, заданной в форме (13), следует отметить, что она относится к обобщенным задачам на собственные значения пучка матриц [8]

$$\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}, \quad \det \mathbf{E} = 0. \quad (14)$$

В общем случае при выполнении условия регулярности пучка (14) [8]

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0, \quad (15)$$

система (13) имеет k конечных собственных значений λ^{fin} и $n - k$ собственных значений «на бесконечности» λ^∞ . При этом можно утверждать следующее: ЭЭС, заданная в алгебро-дифференциальной форме (13), является статически устойчивой тогда и только тогда, когда все конечные собственные значения λ^{fin} обобщенного пучка матриц (14) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости \mathbb{C} , т.е.

$$\forall \lambda^{\text{fin}} : \text{Re}(\lambda^{\text{fin}}) < 0. \quad (16)$$

Набор методов анализа статической устойчивости ЭЭС, заданной в алгебро-дифференциальной форме (13), существенно мал. Он включает:

- спектральные методы (методы обобщенной проблемы собственных значений);
- итерационные методы (методы на основе различных итерационных процедур).

Далее вводится новый итерационный критерий статической устойчивости ЭЭС, заданной в алгебро-дифференциальной форме (13). Данный критерий построен на основе итерационного алгоритма вычисления обобщенной матричной сигнум-функции ЭЭС.

Матричная сигнум-функция (МСФ). Рассмотрим некоторую числовую матрицу $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и множество ее собственных значений

$$\Lambda(\mathbf{W}) = \{ \lambda_i \in \mathbb{C} \mid \det(\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{W}) = 0, \quad i = \overline{1, n} \}. \quad (17)$$

Пусть ни одно из собственных значений λ_i не лежит на мнимой оси. В этом случае справедлива следующая вещественная жорданова декомпозиция матрицы [8, 9]:

$$W = T \left(\begin{array}{c|c} J_- & 0 \\ \hline 0 & J_+ \end{array} \right) T^{-1}, \quad (18)$$

где $J_- \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $J_+ \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ – жордановы блоки, представляющие соответственно устойчивое ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$) и неустойчивое ($\operatorname{Re} \lambda_i > 0$) подмножества собственных значений λ_i матрицы (18).

Введем определение [10].

Определение 1. Матричной сигнум-функцией (МСФ)¹ матрицы W (18) называется выражение

$$\operatorname{sign}(W) = T \left(\begin{array}{c|c} -I_m & 0 \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array} \right) T^{-1}. \quad (19)$$

Таким образом, согласно введенному определению, жорданов блок J_- из разложения (18) ассоциируется в формуле (19) с единичной матрицей $-I_m$, т.е. со скалярной матрицей, на диагонали которой размещены числа «-1», а жорданов блок J_+ – с обычной единичной матрицей I_{n-m} . Здесь m – число собственных значений матрицы W с $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

Отметим, что МСФ $\operatorname{sign}(W)$ единственна для заданной матрицы W и не зависит от алгебраической и геометрической кратности ее собственных значений [8, 9].

Исследование МСФ связано с именами отечественных и зарубежных ученых: А.А. Абрамова, Биверса и Денмона, Робертса, Ф.А. Алиева, Б.А. Бордюга, В.Б. Ларина и др.

Кратко рассмотрим некоторые из свойств МСФ, доказательства которых можно найти в [11].

Свойство 1. Если матрица W асимптотически устойчива (гурвицева), тогда

$$\operatorname{sign}(W) = -I_n. \quad (20)$$

Свойство 2. Если все собственные значения матрицы W лежат в правой полуплоскости \mathbb{C} , тогда

$$\operatorname{sign}(W) = I_n. \quad (21)$$

Свойство 3. Для любой матрицы $T^{-1}WT$

$$\operatorname{sign}(T^{-1}WT) = T^{-1}\operatorname{sign}(W)T. \quad (22)$$

Для вычисления МСФ используют различные алгоритмы [11]. В качестве базового рассмотрим итерационную процедуру Ньютона.

Пусть матрица $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является решением квадратного уравнения (т.е. матричным квадратным корнем)

$$X^2 = I_n. \quad (23)$$

Применяя для решения (23) метод Ньютона, получим следующую итерационную процедуру (ИПН):

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Справедливо следующее утверждение [10].

Утверждение 1. Если последовательность $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ сходится, тогда

$$\operatorname{sign}(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k. \quad (25)$$

Таким образом, согласно (25), предел ИПН (24) дает МСФ (19).

Известно, что итерационная процедура (24) сходится с квадратической скоростью [10].

Обобщенная матричная сигнум-функция (ОМСФ). Определение стандартной МСФ и практическая процедура для ее вычисления могут быть распространены на обобщенный пучок квадратных матриц $\lambda E - A$ [11].

Введем еще одно определение [11].

Определение 2. Обобщенной матричной сигнум-функцией (ОМСФ) пучка матриц (14) называется выражение

$$\operatorname{sign}(A, E) = Y \left(\begin{array}{c|c} -E_{11} & 0 \\ \hline 0 & E_{22} \end{array} \right) X^{-1}, \quad (26)$$

где матрицы E_{11} , E_{22} , X и Y определены следующим образом:

$$A = Y \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right) X^{-1}, \quad E = Y \left(\begin{array}{c|c} E_{11} & 0 \\ \hline 0 & E_{22} \end{array} \right) X^{-1}. \quad (27)$$

Для вычисления ОМСФ применяется следующая обобщенная итерационная процедура Ньютона (ОИПН):

$$X_0 = A, \quad X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + EX_k^{-1}E). \quad (28)$$

При обратимой матрице E и некоторых других допущениях [11] итерации (28) сходятся к матрице

$$E \operatorname{sign}(E^{-1}A) = \operatorname{sign}(AE^{-1})E.$$

ОИПН (28) является привлекательной для решения задачи на обобщенные собственные значения. Высокая производительность программного обеспечения для таких матричных вычислений является доступной в широком классе компьютерных технологий и, особенно, в параллельных компьютерах.

Существенным недостатком ОИПН (28) является требование обращения на каждом шагу итерации матрицы X_k .

Следующая процедура нахождения ОМСФ не использует в явном виде операцию обращения матриц:

$$X_0 = A, \quad Y_0 = E,$$

$$\left(\begin{array}{c} -X_k \\ Y_k \end{array} \right)^\perp = (\tilde{Y}_k \mid \tilde{X}_k), \quad (29)$$

$$X_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_k^{-1} \tilde{X}_k X_k + \rho_k \tilde{Y}_k Y_k),$$

$$Y_{k+1} = \sqrt{2} \tilde{X}_k Y_k.$$

Здесь $(\cdot)^\perp$ – операция вычисления нуль-пространства прямоугольной транспонированной матрицы [12]; $\rho_k > 0$ – коэффициент ускорения.

¹ Matrix sign-function.

При обратимой матрице E справедливо утверждение [11].

Утверждение 2. Если последовательность матриц $\{X, Y\}_{k=0}^{\infty}$ сходится, тогда

$$\text{sign}(A, E) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k Y_k^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k X_k^{-1}. \quad (30)$$

Отметим, что, если в (29) положить $Y_0 = I_n$ и

$$\rho_k^n = \frac{|\det \tilde{X}_k|}{|\det \tilde{Y}_k|},$$

тогда

$$\text{sign}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k.$$

Другими словами, ОИПН (29) дает возможность вычислить стандартную МСФ без явного использования операции обращения.

Процедура (29) получена путем модификации алгоритма, описанного в [13] и применяемого при нахождении численного решения обобщенных алгебраических уравнений Риккати.

Итерационный критерий устойчивости на основе МСФ. Понятие МСФ (19) и рассмотренная ИПН (24) [11] были положены в основу формирования практических критериев устойчивости ЭЭС. Речь идет о критериях типа критерия В.И. Зубова [14]. Напомним, что для проверки асимптотической устойчивости матрицы A по критерию Зубова необходимо найти преобразованную матрицу

$$F = I_n - 2(I_n + A)^{-1},$$

а затем проверить условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F^i = 0,$$

например, следующим (практическим) способом:

$$\|F\| > \|F^2\| > \dots > \|F^i\|.$$

Здесь $\|\cdot\|$ – какая-либо матричная норма.

На основании ИПН (24) в [11] предложен следующий итерационный критерий статической устойчивости ЭЭС, заданной в форме Коши

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (31)$$

Итерационный критерий устойчивости (ИКУ). ЭЭС статически устойчива тогда и только тогда, когда последовательность

$$\{\det(I_n - X)\}_{k=0}^{\infty} \text{ сходится к } 2^n. \text{ При этом для}$$

статически устойчивой ЭЭС $\{\det X\}_{k=0}^{\infty} = (-1)^n$.

Обратно: ЭЭС статически неустойчива тогда и только тогда, когда последовательность $\{\det(I_n - X)\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к нулю. При этом для неустойчивой ЭЭС $\{\det X\}_{k=0}^{\infty} = -1$.

Общее описание алгоритма ИКУ выглядит следующим образом.

Алгоритм ИКУ.

Шаг 0. Положить

$$X_0 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Вычислить $d_0 = \det(I_n - X_0)$.

Шаг 2. Вычислить

$$X_1 = \frac{1}{2}(X_0 + X_0^{-1}), \quad d_1 = \det(I_n - X_0).$$

Шаг N. Вычислить

$$X_N = \frac{1}{2}(X_{N-1} + X_{N-1}^{-1}), \quad d_N = \det(I_n - X_{N-1}).$$

Проверить характер изменения функции $d_k, k = 0, 1, \dots, N$. Если данная функция глобально убывающая, то ЭЭС неустойчива. Если функция $d_k, k = 0, 1, \dots, N$ сходится к значению 2^n , то ЭЭС статически устойчива.

Рассмотрим в качестве примера математическую модель объединенной энергосистемы (ОЭС) Центра, записанной в форме Коши (31) [15]. Данная модель описывает схему энергосистемы, представленную сетями 220–750 кВ. Она включает в себя несколько концентрированных энергосистем, соединенных относительно слабыми межсистемными связями. Схема содержит 286 узлов, 531 ветвей, 129 генераторов.

При составлении математической модели энергосистемы генераторы реальных станций моделировались динамическими звеньями 2-го порядка. В рассматриваемом режиме ОЭС Центра слаборазреженная матрица A имеет порядок $n = 258$ и является статически устойчивой, поскольку ее собственные значения локализованы в следующей области:

$$\{-1,8750 \pm j38,1208; \dots, -0,2078 \pm j11,1112\}. \quad (32)$$

Результаты расчетов статической устойчивости модели ОЭС Центра с помощью алгоритма ИКУ на основе МСФ подтвердили факт ее устойчивости (значения логарифма по основанию 2 определителей d_i по шагам приведены в таблице).

В дальнейших исследования режим ОЭС Центра был изменен так, что у матрицы A появилась одна пара неустойчивых комплексносопряженных корней $0,0011 \pm j6,4419$. Выяснилось, что уже при 20 итерациях определитель d_{20} становится близким к нулю, что свидетельствует о наличии неустойчивых мод колебаний.

Из ОИПН и формулировки утверждения 2 вытекает еще один критерий статической устойчивости на основе МСФ, в котором не используется в явном виде операция обращения матрицы.

Результаты расчетов

Номер шага	$\log_2(d_i)$
0	859,7153
1	613,9249
2	378,1235
3	170,6907
4	66,8680
5	342,4869
6	219,1101
7	254,9146

Номер шага	$\log_2(d_i)$
8	247,4103
9	258,7026
10	255,8663
11	258,1259
12	257,9994
13	258,0...
14	258,0...

Итерационный критерий устойчивости (ИКУ без обращения). ЭЭС статически устойчива тогда и только тогда, когда последовательность

$$\{\|X_k - Y_k\|\}_{k=0}^{\infty} \quad (33)$$

сходится к нулю, где $\|X_k - Y_k\|$ – произвольная матричная норма.

Эквивалентно: ЭЭС статически неустойчива тогда и только тогда, когда последовательность $\{\|X_k - Y_k\|\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к ненулевому числу.

Действительно, для статически устойчивой ЭЭС МФ равна (см. (20))

$$\text{sign}(A) = -I_n. \quad (34)$$

Из сопоставления (30) и (34) следует

$$k \rightarrow \infty: Y_k = X_k \quad (35)$$

или, иначе,

$$k \rightarrow \infty: X_k - Y_k = 0. \quad (36)$$

Таким образом, для статически устойчивой ЭЭС существует последовательность

$$k \rightarrow \infty: \|X_k - Y_k\| = 0, \quad (37)$$

что и требовалось доказать.

Полученные результаты по анализу устойчивости модели ЭЭС в форме Коши распространяются на модель ЭЭС, заданную в алгебро-дифференциальной форме (13).

Итерационный критерий устойчивости на основе ОМСФ. Сформулируем на основании алгоритма (29) итерационный критерий устойчивости ЭЭС, заданной в алгебро-дифференциальной форме (13).

Обобщенный итерационный критерий устойчивости (ОИКУ). ЭЭС, заданная в алгебро-дифференциальной форме (13), является статически устойчивой тогда и только тогда, когда последовательность

$$\{\|X_k - Y_k\|\}_{k=0}^{\infty} \quad (38)$$

сходится к нулю, где $\|X_k - Y_k\|$ – произвольная матричная норма.

Обратно: ЭЭС, заданная в алгебро-дифференциальной форме (13), является неустойчивой тогда и только тогда, когда последовательность (38) сходится к ненулевому числу.

Доказательство ОИКУ основано на справедливости формулировки утверждения 2 (см. (30)) и рассуждениях, аналогичных (34)–(37).

Общее описание алгоритма ОИКУ выглядит следующим образом.

Алгоритм ОИКУ.

Шаг 0. Положить

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad Y_0 = E = \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $\eta_0 = \|X_0 - Y_0\|$.

Задать $\rho_0 > 0$.

Вычислить

$$\begin{pmatrix} -X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}^{\perp} = (\tilde{Y}_0 \mid \tilde{X}_0),$$

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_0^{-1}\tilde{X}_0 X_0 + \rho_0 \tilde{Y}_0 Y_0),$$

$$Y_1 = \sqrt{2}\tilde{X}_0 Y_0,$$

$$\eta_1 = \|X_1 - Y_1\|.$$

Шаг 2. Задать $\rho_1 > 0$.

Вычислить

$$\begin{pmatrix} -X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}^{\perp} = (\tilde{Y}_1 \mid \tilde{X}_1),$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_1^{-1}\tilde{X}_1 X_1 + \rho_1 \tilde{Y}_1 Y_1),$$

$$Y_2 = \sqrt{2}\tilde{X}_1 Y_1,$$

$$\eta_2 = \|X_2 - Y_2\|.$$

Шаг N. Задать $\rho_N > 0$.

Вычислить

$$\begin{pmatrix} -X_N \\ Y_N \end{pmatrix}^{\perp} = (\tilde{Y}_{N-1} \mid \tilde{X}_{N-1}),$$

$$X_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_{N-1}^{-1}\tilde{X}_{N-1} X_{N-1} + \rho_{N-1} \tilde{Y}_{N-1} Y_{N-1}),$$

$$Y_N = \sqrt{2}\tilde{X}_{N-1} Y_{N-1},$$

$$\eta_N = \|X_N - Y_N\|.$$

Проверить характер изменения функции η_k , $k = 0, 1, \dots, N$. Если данная функция глобально убывает до нуля, то ЭЭС статически устойчива. Если функция η_k , $k = 0, 1, \dots, N$ сходится к ненулевому значению, то ЭЭС неустойчива.

Вернемся к математической модели ЭЭС Центра, но записанной не в форме Коши (31), а в алгебро-дифференциальной форме (14), где

$$E = \begin{pmatrix} I_{258} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{544 \times 544}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{544 \times 544}. \quad (39)$$

В результате применения ОИКУ к модели (39) при $\rho_k = 1$ получается график, приведенный на рисунке. Как видно, уже при 15 итерациях итерации сходятся к нулю, что свидетельствует о статической устойчивости рассматриваемой модели ЭЭС Центра.

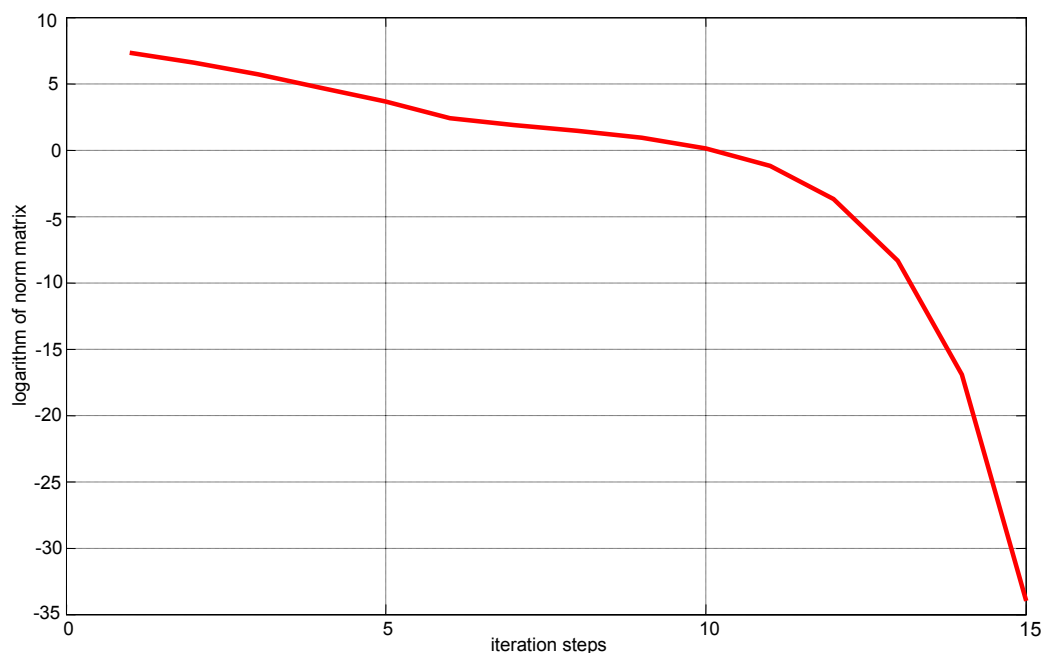


График изменения $\lg(\|X_k - Y_k\|_F)$ по шагам ОИКУ для статически устойчивой модели ОЭС Центра

Заключение

Анализ статической устойчивости на основе линеаризованных уравнений ЭЭС является важной и актуальной задачей. Исходными уравнениями ЭЭС являются уравнения генераторов и электрической сети, имеющие алгебро-дифференциальный вид. В процессе преобразования этих уравнений в форме Коши возникают неизбежные вычислительные ошибки, которые при плохой обусловленности матриц преобразования имеют решающее значение. Предложенные новый итерационный критерий устойчивости (ОИКУ) и алгоритм, построенный на основе матричной сигнум-функции, позволяют производить анализ статической устойчивости ЭЭС в исходной линеаризованной алгебро-дифференциальной форме. Алгоритм для модели ЭЭС с матрицами размера 544×544 дает высокую скорость сходимости.

Список литературы

1. **Веников В.А.** Переходные электромеханические процессы в электрических системах. – М.: Высш. шк., 1970.
2. **Строев В.А.** Статическая устойчивость электроэнергетических систем (системный подход): Дис... д-ра техн. наук. – М.: МЭИ, 1987.
3. **Деммель Дж.** Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001.

Мисриханов Мисрихан Шапиевич,
 МЭС Центра – филиал ОАО «ФСК ЕЭС»,
 генеральный директор, доктор технических наук, профессор,
 телефон (495) 963-47-17,
 e-mail: mms@mes-centra.ru

Рябченко Владимир Николаевич,
 МЭС Центра – филиал ОАО «ФСК ЕЭС»,
 референт генерального директора, доктор технических наук, профессор,
 телефон (495) 963-47-17,
 e-mail: mms@mes-centra.ru

4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1977.
5. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999.
6. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений / Под ред. Д.К. Фаддеева. – М.: Наука, 1984.
7. **Баландин М.Ю., Шурина М.П.** Методы решения СПАУ большой размерности. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.
8. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
9. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1988.
10. **Kenney C., Laub A.J.** The matrix sign function // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1995. – 40 (8). – P. 1330–1348.
11. **Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.** Матричная сигнум-функция в задачах анализа и синтеза линейных систем // Автоматика и Телемеханика. – 2008. – № 2. – С. 26–51.
12. **Bernstein D.S.** Matrix mathematics. Princeton Univ. Press, 2005.
13. **Benner P., Byers R.** An arithmetic for matrix pencil: Theory and new algorithms // Tech. Report, Univ. of Kansas, 2003.
14. **Зубов В.И.** Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1984.
15. **Тузлукова Е.В.** Развитие методов анализа динамических свойств энергосистем на основе решения частичной проблемы собственных значений: Дис... канд. техн. наук / МЭИ. – М., 2004.