© «Вестник ИГЭУ» Вып. 2 2011 г.

УДК 517.55

Определения голоморфной функции многих комплексных переменных

Зиновьев Б.С., Кривоколеско В.П., кандидаты физ.-мат. наук

Доказывается эквивалентность различных подходов к понятию голоморфной функции многих комплексных переменных.

Ключевые слова: голоморфные (аналитические) функции, многие комплексные переменные.

Defining Holomorphic Function of Several Complex Variables

B.S. Zinoviev, Candidate of Physics and Mathematics, V.P. Krivokolesko, Candidate of Physics and Mathematics

The authors prove the equivalence of different approaches to define holomorphic functions of several complex variables.

Key words: holomorphic analytical functions, several complex variables.

К понятию голоморфной функции многих комплексных переменных можно прийти различными путями: с помощью понятия *C*-дифференцируемости, голоморфности функции по каждому переменному; разложения функции в кратный степенной ряд и т.д. Все эти различные подходы приводят к одному и тому же классу голоморфных функций, т.е. являются эквивалентными.

Далее докажем эквивалентность семи определений голоморфной функции многих комплексных переменных и установим связи между ними.

Факт эквивалентности определений является обобщением известной теоремы об эквивалентности понятий голоморфной функции в смысле Римана и Вейерштрасса [1, с. 42].

Пусть $w = f(z) = f(z_1,...,z_n)$ – функция многих комплексных переменных, $z^0 = (z_1^0,...,z_n^0) \in C^n$.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *R*-дифференцируемой в точке z^0, если она дифференцируема в этой точке как функция $2n$ действительных переменных (x, y), $x = (x_1,\dots x_n)$, $y = (y_1,\dots, y_n)$, $z_v = x_v + iy_v$, $v = 1, 2,\dots, n$.

Для *R*-дифференцируемой функции существует дифференциал df, который имеет вид

$$df = \sum_{v=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_v}dx_v + \frac{\partial f}{\partial y_v}dy_v\right). \quad (1)$$

Переходя к комплексным координатам, можно записать

$$df = \sum_{v=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_v}dz_v + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v}d\bar{z}_v\right), \quad (2)$$

где $\frac{\partial f}{\partial z_v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_v} - i\frac{\partial f}{\partial y_v}\right)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_v} + i\frac{\partial f}{\partial y_v}\right). \quad (3)$$

Если обозначить

$$\partial f = \sum_{v=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_v}dz_v, \quad \bar{\partial} f = \sum_{v=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v}d\bar{z}_v, \quad (4)$$

то

$$df = \partial f + \bar{\partial} f. \quad (5)$$

Определение. *R*-дифференцируемая в точке $z^0 \in C^n$ функция $f(z)$ называется *C*-дифференцируемой в этой точке, если выполняется условие Коши-Римана

$$\bar{\partial} f\big|_{z^0} = 0. \quad (6)$$

Условие Коши-Римана (6) равносильно, в силу (4), системе из комплексных уравнений

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v}\right|_{z^0} = 0, \quad v = 1,2,...,n. \quad (7)$$

Обозначим через $U(z^0, r)$ полицилиндр с центром в z^0, т.е.

$$U(z^0, r) = \left\{z : \left|z_v - z_v^0\right| < r_v, v = 1,2,...,n\right\}.$$

Полицилиндр $U(z^0, r)$ является окрестностью точки z^0 в C^n.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется голоморфной (аналитической) в точке $z^0 \in C^n$, если она *C*-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Сформулируем следующие семь утверждений:

1. Функция $w = f(z)$ *C*-дифференцируема в некоторой окрестности $U(z^0, r)$ точки z^0.
2. Функция $w = f(z)$ представима в некотором полицилиндре $U(z^0, r)$ кратным степенным рядом (К. Вейерштрасс), т.е.

$$f(z) = \sum_{|k| \ge 0} c_k (z - z_0)^k, \quad (8)$$

где $|k| = k_1 + ... + k_n$, $k = (k_1,\dots, k_n)$, $k_i = 0, 1, 2,\dots$, $k_i = 0, 1, 2,\dots$, $i = 1,\dots, n$.

3. Функция $w = f(z)$ голоморфна по каждому переменному (при фиксированных остальных) в некотором полицилиндре $U(z^0, r)$ (Б. Риман).
4. Функция $w = f(z)$ голоморфна по каждому переменному и непрерывна по совокупности переменных в некотором полицилиндре $U(z^0, r)$.
5. Функция $w = f(z)$, непрерывная в замыкании полицилиндра $U(z^0, r)$, в любой точке $z \in U(z^0, r)$ представима кратным интегралом Коши

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta_1...d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)...(\zeta_n-z_n)}, \qquad (9)$$

где Γ – остов U, т.е. произведение граничных окружностей.

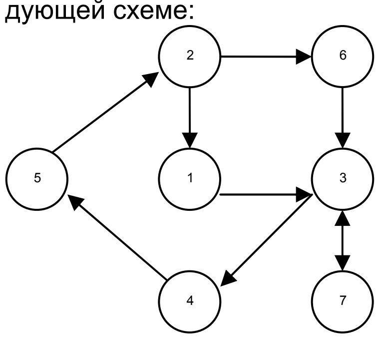
6. Функция $w = f(z)$ имеет в точке $z\in U(z^0,r)$ производные любых порядков по любому переменному.

7. Функция $g(\lambda) = f(z^0 + \lambda e_i)$ голоморфна в некоторой окрестности нуля в C, $z^0\in C^n$, $e_i=(0,...,0,\overset{i}{1},0,...,0)$, $i = 1, 2,\ldots, n$.

Определение. Формула (9) называется кратной формулой Коши.

Теорема. Утверждения 1–7 эквивалентны.

Доказательство будем проводить по следующей схеме:



Импликация 1 $\to$ 3. Пусть функция $w = f(z)$ является C-дифференцируемой в некотором полицилиндре $U(z^0, r)$. Это влечет за собой C-дифференцируемость по каждому переменному, так как по каждому переменному выполняются условия Коши-Римана (7), что и означает голоморфность по каждому переменному.

Импликация 3 $\to$ 4. Эта импликация составляет содержание фундаментальной теоремы Хартогса (Гартогса) [1, с. 36].

Импликация 4 $\to$ 5 составляет содержание теоремы из [1, с. 28].

Импликация 5 $\to$ 2 следует из доказательства теоремы из [1, с. 30].

Импликация 2 $\to$ 1. Пусть функция $w = f(z)$ представляется в полицилиндре $U(z^0, r)$ степенным рядом (8). Сумма $f(z)$ степенного ряда внутри области сходимости является R-дифференцируемой, и в точке $z\in U(z^0,r)$ выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_v}=\sum_{|k|\ge 0}c_k\frac{\partial (z-z_0)^k}{\partial \bar{z}_v}=0,\quad v=1,2,...,n,$$

так как почленное дифференцирование степенного ряда, в силу его равномерной сходимости, возможно.

Импликация 2 $\to$ 6. Степенной ряд (8) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз внутри области сходимости. Поэтому существуют производные любого порядка $|k|$:

$$\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_n^{k_n}},\quad |k|=k_1+...+k_n,\quad z\in U(z^0,r)$$

(см. [1, с. 30]).

Импликация 6 $\to$ 3 тривиальна.

Импликация 3 $\to$ 7. Пусть функция $w = f(z)$ голоморфна по каждому переменному z_v в полицилиндре $U(z^0, r)$.

Рассмотрим функцию [2, с. 10]

$$g(\lambda)=f(z^0+\lambda e_v),$$

где $\lambda\in C$, $e_v=(0,...,0,\overset{v}{1},0,...,0)$, $(e_1,...,e_n)$ – стандартный ортонормированный базис в C^n.

Поэтому $z^0+\lambda e_v=(z_1^0,z_2^0,...,z_v^0+\lambda,...,z_n^0)$,

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda}=\sum_{v=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_v}\frac{dz_v}{d\lambda}+\sum_{v=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}_v}\frac{d\bar{z}_v}{d\lambda}=\frac{\partial f}{\partial z_v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial\bar{\lambda}}=0,\quad z\in U(z^0,r),$$

$$v=1,2,...,n.$$

Из этого следует голоморфность функции в нуле.

Импликация 7 $\to$ 3 сразу следует из предыдущих формул в силу произвольности v, $v = 1, 2,\ldots, n$.

Список литературы

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. – М., 1976.

2. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из C^n. – М.: Мир, 1984.

Зиновьев Борис Сергеевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
e-mail: higher@math.ispu.ru

Кривоколеско Вячеслав Павлович,
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск),
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций,
e-mail: higher@math.ispu.ru