© «Вестник ИГЭУ» Вып. 2 2008

УДК 621.3.011.013.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

КАДНИКОВ С.Н., д-р техн. наук, ВЕСЕЛОВА И.Е., асп.

Рассматривается известное интегральное уравнение, полученное из физических соображений. Приводится его формальный вывод, основанный на теории потенциала. Показано, что ядро имеет слабую особенность, из чего следует, что данное уравнение является уравнением Фредгольма. Установлено, что поверхностная дивергенция плотности тока, являющаяся решением рассматриваемого уравнения, равна нулю, что является необходимым условием потенциальности искомого поля.

Ключевые слова: векторное уравнение, магнитостатическое поле, теория потенциала, циркуляция.

INVESTIGATING BOUNDARY INTEGRAL EQUATION FOR CALCULATING QUASISTATIC MAGNETIC FIELD

S.N. KADNIKOV, Doctor of Engineering, I.E. VESELOVA, Post-Gradute Student

The authors consider the well-known integral equation based on the physical laws. They give its formal conclusion resulting from the potential theory. It is shown that the atomic nucleus has a weak feature, which means that the equation is Fredholm one. It is proved that surface divergence of current density, which is the solution of the equation, is zero, which, in turn, is the necessary condition of target field potentiality.

Key words: vector equation, magnetostatic field, potential theory, circulation.

Рассмотрим граничное интегральное уравнение, полученное в $[1]$ и предназначенное для расчета магнитного поля заданного распределения токов в присутствии ферромагнитных тел (в линейном приближении). Оно имеет следующий вид:

$$\vec{i}_q+\frac{\gamma}{2\pi}\oint_S\left[\vec{n}_q\left[\nabla_q\frac{1}{R_{pq}},\vec{i}_p\right]\right]dS_p=-\frac{2\gamma}{\mu_0}\left[\vec{n}_q,\vec{B}_{0q}\right], \tag{1}$$

где $\vec{i}$ – плотность поверхностного тока; $\vec{B}_0$ – индукция поля, $\gamma=(\mu_i-\mu_e)/(\mu_i+\mu_e)$; μ_i – проницаемость магнетика, ограниченного поверхностью S; μ_e – проницаемость внешней среды; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S.

Поскольку задачи по расчету индуцированной магнитной поляризации могут решаться с помощью скалярных интегральных уравнений на основе потенциалов простого или двойного слоев, векторное уравнение (1) как таковое представляет, в основном, только теоретический интерес. Практическое значение данного уравнения проявляется в том, что его интегральный оператор используется при построении объемно-поверхностных уравнений $[1]$, предназначенных для расчета квазистационарного электромагнитного поля массивных токоведущих проводников и ферромагнитных тел (обмоток и магнитопроводов мощных трансформаторов и реакторов).

При анализе уравнения (1), в первую очередь, необходимо выяснить характер особенности его ядра. Для этого дадим специальный вывод данного уравнения, позволяющий использовать для его анализа известные методы теории потенциала.

Краевая задача по расчету вторичного магнитного поля, создаваемого ферромагнитным телом, ограниченным поверхностью S с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_i>1$, сводится к системе уравнений

$$\operatorname{rot}\vec{B}_{i,e}=0\,, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}_{i,e}=0 \tag{3}$$

при краевых условиях

$$\left[\vec{n},\frac{\vec{B}_e}{\mu_e}-\frac{\vec{B}_i}{\mu_i}\right]\Big|_S=\frac{\mu_e-\mu_i}{\mu_e\mu_i}\left[\vec{n},\vec{B}_0\right]\Big|_S, \tag{4}$$

$$\left(\vec{n},\vec{B}_e-\vec{B}_i\right)\Big|_S=0\,, \tag{5}$$

где $\vec{B}_{i,e}$ – индукция внутри и вне поверхности S.

Кроме того, векторная функция $\vec{B}_e$ должна затухать на бесконечности пропорционально R^{-2}, где R – расстояние между любыми точками в областях V_i+S и V_e.

Будем полагать, что поверхность S принадлежит классу $Л_2(\lambda)$ поверхностей с непрерывной кривизной (λ – показатель Ляпунова поверхности S, $0<\lambda\le 1$), и искать решение краевой задачи в классе C^1 непрерывно дифференцируемых функций.

Введем векторный потенциал соотношением $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$. Уравнение (3) при этом будет удовлетворяться тождественно, а уравнение (2) при условии, которое необходимо для удовлетворения уравнения (2),

$$\operatorname{div}\vec{A}_{i,e}=0 \tag{6}$$

перейдет в векторное уравнение Лапласа

$$\Delta\vec{A}_{i,e}=0\,. \tag{7}$$

Условия, при которых удовлетворяется (6), будут выяснены ниже. Векторный потенциал представим в виде

$$\vec{A}_q = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \vec{i}_p \frac{dS_p}{R_{pq}}. \qquad (8)$$

При таком представлении потенциала условие (5) тождественно удовлетворяется. Для приведения условия (4) к интегральному уравнению вычислим векторы индукции:

$$\vec{B}_{i,eq} = \operatorname{rot}\vec{A}_{i,eq} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \left[\nabla_q \frac{1}{R_{pq}}, \vec{i}_p\right] dS_p. \qquad (9)$$

$$q \notin S$$

Пусть точка q находится на нормали к поверхности S вне поверхности S в области V_e, тогда

$$\left[\vec{n}_q, \vec{B}_{eq}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \left[\vec{n}_q\left[\nabla_q \frac{1}{R_{pq}}, \vec{i}_p\right]\right] dS_p,\ q \notin S. \qquad (10)$$

Используя формулу $\left[a\left[b,c\right]\right] = b(a,c) - c(a,b)$, где a,b,c – произвольные векторы, приведем (10) к виду

$$\left[\vec{n}_q, \vec{B}_{eq}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \nabla_q \frac{1}{R_{pq}}\left(\vec{n}_q, \vec{i}_p\right) dS_p - \\ -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \vec{i}_p\left(\vec{n}_q, \nabla_q \frac{1}{R_{pq}}\right) dS_p. \qquad (11)$$

Второй член справа есть производная по нормали потенциала простого слоя с векторной плотностью $\vec{i}$. Пусть m – точка пересечения поверхности S нормалью. Тогда, поскольку $S \in Л_2(\lambda)$,

$$-\lim_{q\to m}\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \vec{i}_p\left(\vec{n}_p, \nabla_q \frac{1}{R_{pq}}\right) dS_p\right] = \\ = \frac{\mu_0 \vec{i}_q}{2} - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \vec{i}_p\left(\vec{n}_q, \nabla_q \frac{1}{R_{pq}}\right) dS_p. \qquad (12)$$

Для анализа первого интеграла в (11) введем местную систему декартовых координат x,y,z с центром в точке m, направив ось z по внешней нормали к поверхности S. Поскольку точка q находится на этой нормали вне поверхности S, точка $p \in S$, то $R_{pq} = \sqrt{\left(x_p - x_q\right)^2 + \left(y_p - y_q\right)^2 + \left(z_p - z_q\right)^2}$. Составляющая первого интеграла в (11) по оси z есть производная по направлению нормали потенциала простого слоя с плотностью $\left(\vec{n}_q, \vec{i}_p\right)$, обращающейся в нуль при $p = m$ ($\vec{n}_q = \vec{n}_m$). Из этого следует, что внеинтегральный член в выражении для предельного значения данной компоненты интеграла будет отсутствовать, а прямое значение на поверхности $Л_2(\lambda)$ будет несобственным интегралом. При этом следует отметить, что при численном решении эта составляющая будет отсутствовать, поскольку при сведении векторного уравнения (1) к скалярному она скалярно умножается на орт-векторы плотности $\vec{i}_q$, касательные к поверхности S.

Для анализа предельных значений двух других составляющих первого интеграла в (11), содержащих производные R_{pq}^{-1} по x_q, y_q, нужно учесть, что на поверхности Ляпунова угол ψ между нормалями в точках m и p подчиняется условию [2]

$$\psi \le A R_{pm}^{\lambda},\ p,m \in S, \qquad (13)$$

где A, λ – положительные числа, $0 < \lambda \le 1$. Учитывая, что $\left(\vec{n}_q, \vec{i}_p\right) = \left(\vec{n}_q, \vec{\tau}_p\right)\cdot i_p$, где $\vec{\tau}_p$ – единичный вектор, касательный к поверхности S ($\vec{i}_p = i_p \cdot \vec{\tau}_p$), перенесем, сохраняя направление, нормаль из точки m в точку p. Тогда нетрудно показать, что $\left(\vec{n}_q, \vec{\tau}_p\right) = \sin\psi\cos\alpha$, где α – угол между вектором $\vec{\tau}_p$ и проекцией $\vec{n}_q$ на плоскость, касательную к поверхности S в точке q, $0 \le \alpha < 2\pi$. В результате

$$\left|\left(\vec{n}_q, \vec{\tau}_p\right)\right| < \sin\psi \le \psi \le A R_{pm}^{\lambda}. \qquad (14)$$

Кроме того,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{1}{R_{pq}}\right)\right| = \left|\frac{x_q}{R_{pq}}\frac{1}{R_{pq}^2}\right| \le \frac{1}{R_{pq}{}^2}. \qquad (15)$$

В итоге находим, что составляющая по оси x ядра первого интеграла в (11) допускает следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{1}{R_{pq}}\right)\left(\vec{n}_q, \vec{\tau}_p\right)\right| < \frac{A}{R_{pq}^{2-\lambda}}. \qquad (16)$$

Из этого следует [2], что при $q \to m$ первый член разложения в (11), при $q \notin S$ являющийся собственным интегралом, сходится к несобственному интегралу, который будет непрерывной функцией точки q на S при $\vec{i}_p \in C^1$.

Таким образом, согласно (12) и (16), предельное значение касательной составляющей индукции $\vec{B}_e$ определяется как

$$\left[\vec{n}_q, \vec{B}_{eq}\right] = \frac{\mu_0 \vec{i}_q}{2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \left[\vec{n}_q\left[\nabla_q \frac{1}{R_{pq}}, \vec{i}_p\right]\right] dS_p. \qquad (17)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\left[\vec{n}_q, \vec{B}_{iq}\right] = -\frac{\mu_0 \vec{i}_q}{2} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \left[\vec{n}_q\left[\nabla_q \frac{1}{R_{pq}}, \vec{i}_p\right]\right] dS_p. \qquad (18)$$

$$q \in S$$

Подставляя (17), (18) в граничное условие (4), получим уравнение (1) с ядром, имеющим слабую особенность.

Следуя [2], можно доказать, что на поверхности класса $Л_2(\lambda)$ и при $\vec{B}_0 \in C^\infty$ решение (1) будет непрерывной функцией. Но тогда, согласно [2] (гл. II, §21; гл. III, §18), интегральный член в уравнении (1) будет принадлежать классу C^1, как и решение уравнения (1) (если оно существует).

Для доказательства единственности решения уравнения (1) положим его правую часть равной нулю и покажем, что полученное интегральное уравнение при любых конечных μ_i, μ_e будет иметь только нулевое решение. В соответствии с первой теоремой Фредгольма это будет означать, что решение (1) существует и единственно.

В первую очередь, очевидно, нужно доказать, что условие (6) есть свойство краевой задачи (7), (4), (5) (при $\vec{B}_{e,i} = rot\vec{A}_{e,i}$). Применим к граничному условию (4) операцию поверхностной дивергенции. Возьмем для этого на поверхности S замкнутый контур l, который можно стянуть в точку, умножим условие (4) на вектор $\vec{n}_S$ внешней нормали к этому контуру, лежащий в плоскости, касательной к поверхности S, и проинтегрируем полученное выражение по контуру l. После этого поделим обе части полученного выражения на площадь S_l поверхности, ограниченной контуром l, и устремим S_l к нулю. В результате вместо (4) получим

$$\left.\left(\vec{n}, \frac{1}{\mu_e} rot\vec{B}_e - \frac{1}{\mu_i} rot\vec{B}_i\right)\right|_S = 0 . \qquad (19)$$

Правая часть оказалась равной нулю согласно закону полного тока, поскольку предполагается, что источники внешнего поля расположены вне поверхности S.

Поскольку поверхность $S \in Л_2(\lambda)$, можно показать [2] (гл. II, § 19), что векторный потенциал $\vec{A}$, определенный формулой (8), будет иметь непрерывные вторые производные в замкнутых областях $V_i + S, V_e + S$; и соответственно, $\vec{B}_i, \vec{B}_e$, определенные формулой (9), – непрерывные первые производные в тех же областях. Поэтому дифференцирование условия (4) законно. Кроме того, вне поверхности S

$$rot\,\vec{B}_{e,i} = rot\,rot\vec{A}_{e,i} = -\Delta\vec{A}_{e,i} + grad\,div\vec{A}_{e,i} =$$
$$= grad\,div\vec{A}_{e,i},$$

поскольку уравнение $\Delta\vec{A}_{e,i} = 0$ выполняется в V_i, V_e. В силу отмеченных выше свойств поверхности S, а также того, что $\vec{i} \in C^1$, предел $\Delta A_{e,i}$ будет равен нулю на поверхности S. После введения потенциала $\varphi_{e,i} = div\vec{A}_{e,i}$ условие (19) можно переписать в виде

$$\left.\frac{1}{\mu_e}\frac{\partial\varphi_e}{\partial x}\right|_S - \left.\frac{1}{\mu_i}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right|_S = 0 . \qquad (20)$$

Учитывая, что $\vec{i} \in C^1$, имеем [3]

$$\begin{aligned} div\,\vec{A}_q &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\left(\vec{i}_p, \nabla_q \frac{1}{R_{pq}}\right)dS_p = \\ &-\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\left(\vec{i}_p, \nabla_p \frac{1}{R_{pq}}\right)dS_p = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \nabla_{sp}\left(\vec{i}_p, \frac{1}{R_{pq}}\right)dS_p + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\left(\nabla_{sp}\vec{i}_p\right)\frac{1}{R_{pq}}dS_p . \end{aligned} \qquad (21)$$

Во второй строке первый интеграл от поверхностной дивергенции по замкнутой поверхности обращается в нуль (при $\mu_i, \mu_e > 1$ это показано в [3]). Таким образом, $div\vec{A}_{e,i}$ есть потенциал простого слоя

$$\varphi_{e,i} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \sigma_p \frac{dS_p}{R_{pq}} \qquad (22)$$

с плотностью $\sigma = \left(\nabla_S, \vec{i}\right)$ (μ_i, μ_e – знак поверхностной дивергенции), удовлетворяющий уравнению Лапласа в V_i, V_e и условию

$$\varphi_e|_S = \varphi_i|_S . \qquad (23)$$

Потенциал простого слоя, удовлетворяющий однородным условиям (20), (23), равен нулю во всем пространстве [1]. Из этого следует, что условие (6) удовлетворяется.

Далее, используя соотношения $\vec{B}_e = \mu_0 rot\vec{A}_e$, $\vec{B}_i = \mu_0\mu_i rot\vec{A}_i$, а также формулу

$$div\left[\vec{A}, rot\,\vec{A}\right] = \left(rot\vec{A}, rot\vec{A}\right) - \left(\vec{A}, rot\,rot\vec{A}\right) = \left(rot\vec{A}, rot\vec{A}\right),$$

которая справедлива для потенциалов $\vec{A}_i, \vec{A}_e$, поскольку условие (6) выполняется, рассмотрим следующие тождества:

$$\oint_S\left(\vec{n}, \left[\vec{A}_i, \frac{1}{\mu_0\mu_i} rot\vec{A}_i\right]\right)dS = \frac{1}{\mu_0\mu_i}\int_{V_i}\left|rot\vec{A}_i\right|^2 dV, \qquad (24)$$

$$-\oint_S\left(\vec{n}, \left[\vec{A}_e, \frac{1}{\mu_0\mu_e} rot\vec{A}_e\right]\right)dS = \frac{1}{\mu_0\mu_e}\int_{V_e}\left|rot\vec{A}_e\right|^2 dV. \qquad (25)$$

Складывая (24), (25) и учитывая условие (4), а также непрерывность потенциала $\vec{A}_{e,i}$, данного формулой (8), найдем, что

$$\frac{1}{\mu_0\mu_i}\int_{V_i}\left|rot\vec{A}_i\right|^2 dV + \frac{1}{\mu_0\mu_e}\int_{V_e}\left|rot\vec{A}_e\right|^2 dV = 0 . \qquad (26)$$

Из этого следует, что $\vec{B}_{e,i} = rot\vec{A}_{e,i} = 0$. Из соотношений (17), (18) следует, что $\left[\vec{n}, \vec{B}_e - \vec{B}_i\right] = \mu_0\vec{i}$, $\vec{i} = 0$, что и означает единственность решения (1) при любых конечных μ_i, μ_e, т.е. при $-1 < \gamma < 1$.

В качестве следствия из полученных результатов можно отметить следующее. Поскольку потенциал простого слоя (22) (равный $div\vec{A}_{e,i}$) равен нулю во всем пространстве, а плотность его $\sigma = \left(\nabla_S, \vec{i}\right)$ есть непрерывная функция ($\vec{i} \in C^1$), то $\left(\nabla_S, \vec{i}\right) = 0$. Таким образом, если $\vec{B}_{e,i} = rot\vec{A}_{e,i}$, а потенциал $\vec{A}_{e,i}$ представлен в виде (8), то поверхностная дивергенция плотности тока должна быть равна нулю.

Следует отметить, что единственность решения (1) доказана для конечных μ_i, μ_e ($\mu_i, \mu_e > 1$), что следует из формул (24), (25). Это означает, что $-1 < \gamma < 1$. В то же время известно, что при расчетах магнитных полей часто используется приближение идеального магнетика, при котором параметр γ в уравнении (1) может принимать значения ± 1. Поэтому представляет и практический и теоретический интерес анализ этих особых вариантов уравнения (1). Рассмотрим сначала случай, когда $\mu_i \to \infty$, т.е. $\gamma = 1$. В области V_i напряженность поля будет равна нулю, а индукция может принимать конечные значения, что может быть показано на конкретном примере составного замкнутого сердечника тороидальной формы, одна часть которого имеет конечную магнитную проницаемость μ_1, а проницаемость другой – $\mu_2 >> \mu_1$. Где бы ни находилась обмотка с током, охватывающая сердечник, магнитный поток, а следовательно, и индукция в любой его части не будут равны нулю. Очевидно при $\mu_2 \to \infty$ эта ситуация не изменится, что и доказывает данное утверждение, т.е. возможности ненулевых и конечных значений индукции в идеальном магнетике. Поэтому при $\mu_i \to \infty$ граничное условие (4) примет вид

$$\left[\vec{n}, \vec{B}_e\right] = -\left[\vec{n}, \vec{B}_0\right]. \quad (27)$$

Из этого условия, согласно (17), получается уравнение (1) при $\gamma = 1$. При доказательстве единственности решения (1) в этом случае нужно использовать формулу

$$-\oint_S \left(\vec{n}, \left[\vec{A}_e, rot\vec{A}_e\right]\right) dS = \int_V \left| rot\vec{A}_e \right|^2 dV. \quad (28)$$

Поскольку

$$\left(\vec{n}, \left[\vec{A}_e, rot\vec{A}_e\right]\right) = -\left(\vec{A}_e, \left[\vec{n}, rot\vec{A}_e\right]\right) = -\left(\vec{A}_e, \left[\vec{n}, \vec{B}_e\right]\right) = 0,$$

то из (28) следует, что $\vec{B}_e = 0$ в области $V_e + S$ в силу того, что функция $\vec{B}_e$, согласно принятым допущениям о гладкости поверхности S и $\vec{i}$, непрерывна в области $V_e + S$.

Очевидно, равна нулю на внешней стороне поверхности S и нормальная составляющая $\vec{B}_e$. Поскольку она непрерывна при переходе через поверхность S, то она равна нулю и на внутренней стороне поверхности S, т.е. $B_{in}\big|_S = 0$. Кроме того, в области V_i (внутри S) она подчиняется уравнениям (2), (3). Из этого следует, что если V_i – односвязная область, в которой любой замкнутый контур можно стянуть в точку, то в ней $\vec{B}_i = 0$. Это может быть доказано путем использования представления $\vec{B}_i = -\nabla\varphi_i$, где φ_i имеет в области V_i непрерывные вторые производные и удовлетворяет в ней уравнению Лапласа: $\Delta\varphi_i = 0$, что следует из уравнения (2). Для доказательства рассмотрим тождество (формулу Грина)

$$\oint_S \varphi_i \left(\vec{n}, \nabla\varphi_i\right) dS = \int_V \left|\nabla\varphi_i\right|^2 dV. \quad (29)$$

По предположению, функция φ_i непрерывна. Поскольку на поверхности S $B_{in} = \left(\vec{n}, \nabla\varphi_i\right) = 0$, то $\nabla\varphi_i = 0$ в области V_i, что и требовалось доказать.

Покажем, что функция φ_i в односвязной области V_i не может иметь разрывов. Допустим обратное, и пусть S_1 – некоторая незамкнутая поверхность в области V_i, при пересечении которой функция φ_i испытывает скачок $\varphi_i\big|_{S_{1+}} - \varphi_i\big|_{S_{1-}} = \varphi_0 \neq 0$. При этом в открытой области V_i с исключенной поверхностью S_1 удовлетворяется уравнение $\Delta\varphi_i = 0$, а функция $\vec{B}_i = -\nabla\varphi_i$ меняется непрерывно при пересечении поверхности S_1. При этих условиях нетрудно показать, что очевидное требование равенства нулю циркуляции $\vec{B}_i$ по любому замкнутому контуру в области V_i приводит к тому, что $\varphi_0 = 0$, т.е. разрывов φ_i внутри S быть не может. При этом следует отметить, что распределение источников внешнего поля в случае односвязной области может быть любым, т.е. на него не накладывается никаких геометрических (точнее топологических) ограничений.

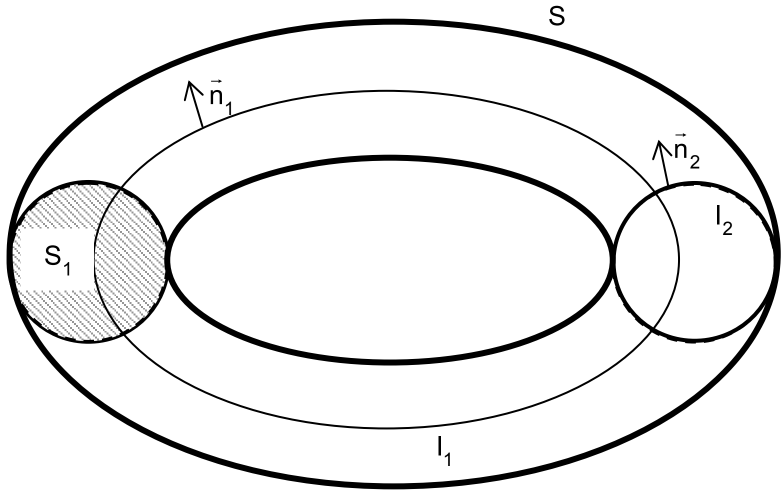

Рис. 1

Другая ситуация возникает, если область V_i – многосвязная. В качестве примера можно взять двухсвязную внутреннюю область, ограниченную поверхностью тороидальной формы, (см. рисунок). Нетрудно видеть, что если обмотка, создающая внешнее поле, охватывает тороид, то решение такой задачи не существует. Если провести замкнутый контур, проходящий по поверхности магнетика и охватывающий обмотку, то циркуляция вектора $\vec{H}_e$ по этому контуру будет равна нулю, поскольку напряженность магнитного поля в идеальном магнетике равна нулю, как и касательная составляющая индукции полного поля на его поверхности. С другой стороны, эта циркуляция должна быть равна числу ампер-витков обмотки. Поэтому следует считать, что витки обмотки в данной задаче тороид не охватывают. Далее, если допустить, что на поверхности S существует некоторое ненулевое распределение токов, то циркуляция вектора $\vec{B}_i$ по любому контуру вида l_1 (см. рисунок), проходящему внутри поверхности S и охватывающему ее изнутри (такой контур невозможно стянуть в точку, что является в данном случае признаком двухсвязной поверхности), может быть равна некоторому току $I \neq 0$. Поскольку $\vec{B}_i = -\nabla\varphi_i$, потенциал φ_i должен испытывать разрыв на некоторой поверхности S_1, пересекающей поверхность S (см. рисунок). При этом

$$\oint_{l_1} \vec{B}_i\, \vec{dl} = -\oint_{l_1} \nabla\varphi_i dl = \varphi_i\big|_{S_{1+}} - \varphi_i\big|_{S_{1-}} = I \neq 0 \,. \qquad (30)$$

Из данного соотношения следует, что для того, чтобы $\vec{B}_i = 0$ в V_i, необходимо условие

$$I = \oint_{l_1} \left(\vec{i}, \vec{n}_1\right) dl = 0 \,, \qquad (31)$$

где $\vec{n}_1$ – вектор нормали, лежащий в плоскости касательной поверхности S, а контур l_1 должен лежать на внутренней ее стороне.

Покажем, что условия (31) достаточно для того, чтобы поле внутри поверхности S было равно нулю. Для области V_i' с исключенной поверхностью S_1 формула (29) примет вид

$$\int_S \varphi_i \left(\vec{n}, \nabla\varphi_i\right) dS + \int_{S_1} \varphi_{i+} \left(\vec{n}, \nabla\varphi_{i+}\right) dS -$$
$$-\int_{S_1} \varphi_{i-} \left(\vec{n}, \nabla\varphi_{i-}\right) dS = \int_{V_i'} \left|\nabla\varphi_i\right|^2 dV \,. \qquad (32)$$

Поскольку $\vec{B}_i = -\nabla\varphi_i$, по условию, непрерывна в области V_i', $\left(\vec{n}, \nabla\varphi_{i+}\right) = \left(\vec{n}, \nabla\varphi_{i-}\right)$ на поверхности S_1 и $\left(\vec{n}, \nabla\varphi_i\right) = 0$ на поверхности S, тогда из (32) и (30) получаем

$$I \int_{S_1} \left(\vec{n}, \nabla\varphi_i\right) dS = \int_{V_i'} \left|\nabla\varphi_i\right|^2 dV \,. \qquad (33)$$

Согласно условию (31), $I = 0$, и тогда, в силу (33), $\vec{B}_i = -\nabla\varphi_i = 0$ в области V_i. Согласно формулам (17), (18), разность касательных составляющих индукции на поверхности S равна $\vec{i}$. Поскольку обе они равны нулю, $\vec{i} = 0$, т.е. уравнение (1) при $\gamma = 1$ при условии (31) решает краевую задачу (2), (3), (27) для идеального магнетика тороидальной формы, находящегося в поле постоянных токов.

При численном решении условие (1) целесообразно внести в уравнение (1). Контур l_1, охватывающий поверхность S изнутри, может быть выбран произвольно, поскольку плотность тока на поверхности S подчиняется условию $\left(\nabla_s \vec{i}\right)=0$. Зафиксировав контур l_1, умножим (31) на $k_1\vec{n}_1$, где k_1 – произвольный числовой коэффициент, и сложим с уравнением (1) $(\gamma=1)$:

$$\vec{i}_q+\frac{1}{2\pi}\oint\limits_S\left[\vec{n}_q\left[\nabla_q\frac{1}{R_{pq}}\right]\right]dS_p+ \\ +k_1\vec{n}_{1q}\oint\limits_{l_1}\left(\vec{i},\vec{n}_1\right)dl=-\frac{2}{\mu_0}\left[\vec{n}_q,\vec{B}_{0q}\right]. \qquad (34)$$

Чтобы показать, что из данного уравнения вытекает условие (31), перепишем (34) с учетом (17) в виде

$$\left[\vec{n}_q,\frac{\vec{B}_{eq}}{\mu_0}\right]+\frac{K_1}{2}\vec{n}_{1q}\oint\limits_{l_1}\left(\vec{i},\vec{n}_1\right)dl=-\frac{1}{\mu_0}\left[\vec{n}_q,\vec{B}_{0q}\right]. \qquad (35)$$

Умножим данное равенство скалярно на вектор $\vec{n}_{1q}$ и проинтегрируем по контуру l_1. Первый член слева даст циркуляцию вектора $\vec{B}_e$ по контуру вида l_1, расположенному на внешней стороне поверхности S. Правая часть даст условие

$$\oint\limits_{l_1}\vec{B}_0\,\overrightarrow{dl}=0, \qquad (36)$$

которое выполняется в силу наложенного выше ограничения на расположение источников внешнего поля. Соотношение (36) можно рассматривать как необходимое условие существования решения уравнения (1) данной задачи ($\gamma=1$, S – двухсвязная тороидальная поверхность идеального магнетика). В результате (35) сводится к условию (31), т.е. система (1), (31) ($\gamma=1$) равносильна уравнению (34).

Рассмотрим теперь вариант $\gamma=-1$, когда идеальным магнетиком заполнена область V_e. Если S – односвязная поверхность, то по сравнению с вариантом $\gamma=1$ ничего нового здесь не будет и задачу решает уравнение (1) при $\gamma=-1$, решение которого единственно. Если же S – двухсвязная тороидальная поверхность, то здесь, так же как и в предыдущем аналогичном варианте, нужно наложить ограничение на геометрию источников внешнего поля (витков обмотки). Они не должны охватывать поверхность S изнутри, т.е. иметь форму контуров вида l_1. Если допустить существование таких витков (с токами), то задача не будет иметь решения, поскольку циркуляция вектора $\vec{H}_1$ по контуру вида l_2 (см. рисунок), охватывающему эти витки и лежащему на внутренней стороне поверхности S, будет равна нулю, что невозможно. Поэтому на правую часть уравнения (1) при данной форме S должно быть наложено условие вида

$$\oint\limits_{l_2}\vec{B}_0\,\overrightarrow{dl}=0, \qquad (37)$$

где l_2 – замкнутый контур, охватывающий поверхность S (см. рисунок).

Кроме того, пользуясь рассуждениями варианта $\gamma=1$, приходим к следующему условию существования решения (1) при $\gamma=-1$:

$$\oint\limits_{l_2}\left(\vec{i},\vec{n}_2\right)dl=0, \qquad (38)$$

где l_2 – контур, лежащий на поверхности S; $\vec{n}_2$ – вектор нормали к l_2, касательный к поверхности S.

Уравнение, решающее данную задачу, имеет вид, аналогичный (34):

$$\vec{i}_q-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_S\left[\vec{n}_q\left[\nabla_q\frac{1}{R_{pq}}\right]\right]dS_p+ \\ +k_1\vec{n}_{2q}\oint\limits_{l_2}\left(\vec{i},\vec{n}_2\right)dl=-\frac{2}{\mu_0}\left[\vec{n}_q,\vec{B}_{0q}\right]. \qquad (39)$$

В заключение можно отметить, что изложенный способ обеспечения единственности интегральных уравнений, предназначенных для расчета магнитостатического поля, аналогичен приемам построения однозначно разрешимых интегральных уравнений для расчета электростатического поля. Если в электростатике для этой цели используются интегральные условия, наложенные на заряды, то в магнитостатике – интегральные условия, наложенные на полные токи. Отличие, однако, состоит в том, что в электростатике характер дополнительных условий не зависит, в отличие от магнитостатики, от топологических свойств расчетных областей.

Список литературы

1. **Тозони О.В., Маейргойз И.Д.** Расчет трехмерных электромагнитных полей. – Киев: Техника, 1974.
2. **Гюнтер Н.М.** Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953.
3. **Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.** Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970.

Кадников Сергей Николаевич,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологии,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Веселова Ирина Евгеньевна,
ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина,
ассистент кафедры высшей математики,
e-mail: iveselova@math.ispu.ru