

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени В.И. ЛЕНИНА»

**ЗОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
РАДИАЦИОННОГО И СЛОЖНОГО  
ТЕПЛООБМЕНА**

Иваново 2012

УДК 534.24.001.573

Б 94

Бухмиров В.В., Солнышкова Ю.С. Зональные методы расчёта радиационного и сложного теплообмена/ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». - Иваново, 2012 .- 96 с.

В учебном пособии кратко даны основные сведения по расчету радиационного теплообмена в диатермичных и ослабляющих излучение средах, в доступной форме освещены основы современных зональных методов расчета радиационного и сложного теплообмена. Дано математическое описание всех существующих в настоящее время модификаций зональных методов. Приведены примеры расчета теплообмена в замкнутой системе, состоящей из трех тел.

Предназначено для студентов теплоэнергетического и инженерно-физического факультетов ИГЭУ, изучающих курс "Тепломассообмен", а также могут быть полезны для студентов при самостоятельном углублённом изучении курса ТМО.

Илл. 21. Табл. 10. Библиогр.: 10 назв.

Печатается по решению редакц.- изд. совета ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

Рецензент

кафедра теоретических основ теплотехники ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

## ВВЕДЕНИЕ

*Тепломассообмен (ТМО)* – наука о *самопроизвольных необратимых* процессах распространения теплоты в переменном поле температур и о *самопроизвольных необратимых* процессах распространения массы в переменном поле концентраций. В движущихся средах процессы ТМО зависят от скорости перемещения текучей среды.

Согласно второму закону термодинамики самопроизвольный процесс распространения теплоты происходит в сторону уменьшения температуры. Аналогично поток массы в переменном поле концентраций направлен в сторону убывания концентрации данного компонента смеси.

В отличие от методов термодинамического анализа, при изучении тепломассообмена рассматривают развитие процессов переноса в пространстве и во времени. В результате решения задачи тепломассообмена находят распределения температур, концентраций компонентов смеси, а также потоков теплоты и массы как функции координат и времени.

В природе существуют три элементарных способа передачи теплоты: *теплопроводность (кондукция)*, *конвекция* и *тепловое излучение (радиационный теплообмен)*.

*Теплопроводность (кондукция)* – способ передачи теплоты за счет взаимодействия микрочастиц тела (атомов, молекул, ионов в электролитах и электронов в металлах) в переменном поле температур.

Теплопроводность происходит в твердых, жидких и газообразных телах. В твердых телах теплопроводность является единственным способом передачи теплоты. В вакууме теплопроводность отсутствует.

*Конвекция* – способ передачи теплоты за счет перемещения макрообъемов среды из области с одной температурой в область с другой температурой. При этом текучая среда (флюид) с более высокой температурой перемещает-

ся в область низких температур, а холодный флюид поступает в область высоких температур. В вакууме конвекция теплоты невозможна.

Конвекция теплоты всегда происходит совместно с теплопроводностью, так как макрообъемы текучей среды состоят из микрочастиц и существует неравномерное по пространству температурное поле. Передачу теплоты совместно теплопроводностью и конвекцией называют *конвективным теплообменом*, который уже не является элементарным способом передачи теплоты. Конвективный теплообмен относят к *сложному теплообмену*.

В данном пособии рассмотрены основы теории радиационного теплообмена (РТО), включая подробное описание современных методов расчета переноса теплоты излучением.

В первом разделе приведены основные положения радиационного теплообмена и так называемые инженерные методики расчета температурных полей и тепловых потоков при переносе лучистой энергии.

Второй раздел пособия посвящен описанию современных зональных методов расчета РТО в системе твердых тел, разделенных как диатермичной средой, так и ослабляющим излучение газом. Даны все основные модификации зональных методов расчета радиационного теплообмена.

В третьем разделе рассмотрены конкретные примеры расчета РТО при решении модельных задач классическим и резольвентным зональными методами.

# РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

## § 1.1. Основные понятия и определения

*Тепловое излучение (радиационный теплообмен)* – способ переноса теплоты в пространстве, осуществляемый в результате распространения электромагнитных волн, энергия которых при взаимодействии с веществом переходит в тепло. Радиационный теплообмен связан с двойным преобразованием энергии и происходит в три этапа:

— первоначально внутренняя энергия тела превращается в энергию электромагнитного излучения (энергию фотонов или квантов);

— затем лучистая энергия переносится электромагнитными волнами в пространстве, которые в однородной и изотропной среде и в вакууме распространяются прямолинейно со скоростью света (в вакууме скорость света равна  $3 \cdot 10^8$  м/с), подчиняясь оптическим законам преломления, поглощения и отражения;

— при взаимодействии с веществом, происходит второй переход лучистой энергии во внутреннюю энергию тела путем поглощения фотонов.

Тепловому излучению соответствует интервал длин волн  $\lambda = 0,4 \div 25$  мкм ( $1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$ ), поскольку основная доля лучистой энергии в теплотехнических агрегатах передается именно в этом диапазоне длин волн. Заметим, что видимые световые лучи имеют длину волны  $\lambda = 0,4 \div 0,8$  мкм, а к инфракрасному или тепловому излучению в общем случае относят диапазон длин волн  $\lambda = 0,8 \div 1000$  мкм.

*Особенности радиационного теплообмена:*

— тепловое излучение вещества зависит от температуры тела (степени нагретости вещества), поэтому все тела

(твердые тела, жидкости и лученепрозрачные газы) с температурой выше нуля по Кельвину обладают собственным тепловым излучением;

— для передачи теплоты излучением не требуется тепло-посредник, т.е. лучистая энергия может передаваться и в вакууме;

— при температурах до 100°C лучистая и конвективная (при свободной конвекции) составляющие теплообмена имеют один порядок; в высокотемпературных энергетических (например, парогенераторах) и высокотемпературных теплотехнологических (например, металлургических печах) лучистый теплообмен является доминирующим в суммарном теплопереносе от горячего источника к приемнику тепловой энергии;

— в расчетах необходимо учитывать особенности поверхностного излучения (твердые тела) и объемного излучения (лученепрозрачные газы).

*Спектром излучения* называют распределение лучистой энергии по длине волны  $E_\lambda = f(\lambda)$ , где  $E_\lambda$ , Вт/м<sup>3</sup> – спектральная плотность теплового потока собственного излучения (спектральная лучеиспускательная способность тела). У большинства твердых тел спектры сплошные. У газов и полированных металлов спектры линейчатые или *селективные* (рис.1.1).

С точки зрения радиационного теплообмена различают два типа поверхностей: *диффузные* и *зеркальные*. Диффузные поверхности отражают все падающее на них излучение в пределах полусферы. У зеркальных поверхностей угол падения луча равен углу его отражения.

### *Параметры и характеристики теплового излучения*

Как и любой другой способ переноса теплоты, теплообмен излучением характеризуется *температурным полем*

системы тел, участвующих в радиационном теплообмене ( $T, K$ ), и *тепловыми потоками* излучения ( $Q, \text{Вт}$ ), или поверхностными плотностями тепловых потоков излучения ( $E, \text{Вт}/\text{м}^2$ ). Температура и тепловой поток – параметры теплового излучения.

Телам, участвующим в радиационном теплообмене, приписывают некоторые специфические свойства, называемые *радиационными характеристиками* или *радиационными свойствами* тела. К радиационным характеристикам тела относят *поглощательную, отражательную и пропускательную способности* тела, *степень черноты* и *угловую степень черноты*. Все названные радиационные характеристики могут быть как интегральными (для всего спектра излучения), так и спектральными (для бесконечно малого диапазона длин волн  $\Delta\lambda$ ).

*Потоком излучения* ( $Q, \text{Вт}$ ) называют количество лучистой энергии, проходящее через заданную поверхность площадью  $F$  в *единицу* времени.

Поверхностной *плотностью потока излучения* ( $E, \text{Вт}/\text{м}^2$ ) называют количество лучистой энергии, проходящее через заданную *единичную* поверхность в *единицу* времени.

В расчетах радиационного теплообмена приняты следующие обозначения:

- $Q_{\text{пад}}$  и  $E_{\text{пад}}$  – поток и плотность потока излучения, падающие на поверхность тела;
- $Q_{\text{отр}}$  и  $E_{\text{отр}}$  – поток и плотность потока излучения, отраженные от поверхности тела;
- $Q_{\text{погл}}$  и  $E_{\text{погл}}$  – поток и плотность потока излучения, поглощенные телом;
- $Q_{\text{проп}}$  и  $E_{\text{проп}}$  – поток и плотность потока излучения, пропускаемые телом;
- $Q_{\text{соб}}$  ( $Q$ ) и  $E_{\text{соб}}$  ( $E$ ) – поток и плотность потока собственного излучения тела;

—  $Q_{\text{эф}}$  и  $E_{\text{эф}}$  – поток и плотность потока эффективно-го излучения тела;

—  $Q_{\text{рез}}$  и  $E_{\text{рез}}$  – поток и плотность потока результирующего излучения тела

*Поглощательная, отражательная и пропускательная способности тела*

Для рассмотрения физического смысла поглощательной, отражательной и пропускательной способностей тела рассмотрим полупрозрачное тело, на поверхность которого падает поток излучения  $Q_{\text{пад}}$  (рис. 1.2). Очевидно, что для любого полупрозрачного тела из закона сохранения энергии следует:

$$Q_{\text{пад}} + Q_{\text{отр}} + Q_{\text{проп}} = Q_{\text{пад}} . \quad (1.1)$$

Разделив левую правую части равенства (1.1) на поток падающего излучения  $Q_{\text{пад}}$ , получим

$$\frac{Q_{\text{погл}}}{Q_{\text{пад}}} + \frac{Q_{\text{отр}}}{Q_{\text{пад}}} + \frac{Q_{\text{проп}}}{Q_{\text{пад}}} = \frac{Q_{\text{пад}}}{Q_{\text{пад}}} \quad (1.2)$$

или

$$A + R + D = 1 , \quad (1.3)$$

где  $A = Q_{\text{погл}} / Q_{\text{пад}}$  – *поглощательная способность* тела, равная доле падающего излучения, поглощенного телом;

$R = Q_{\text{отр}} / Q_{\text{пад}}$  – *отражательная способность* тела, равная доле падающего излучения, отраженного телом;

$D = Q_{\text{проп}} / Q_{\text{пад}}$  – *пропускательная способность* тела, равная доле падающего излучения, проходящего через тело.



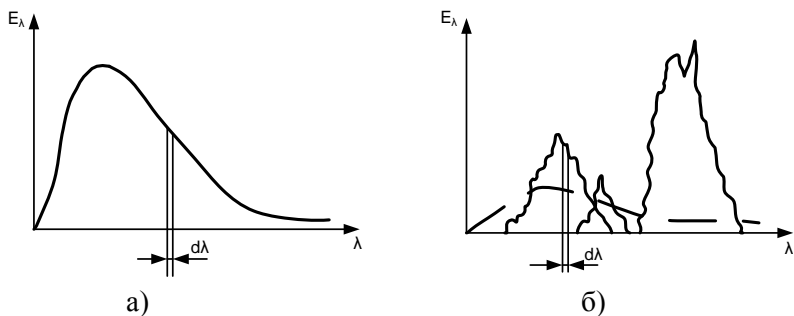


Рис. 1.1. Распределение по спектру энергии излучения твердого тела (а) и газа (б)

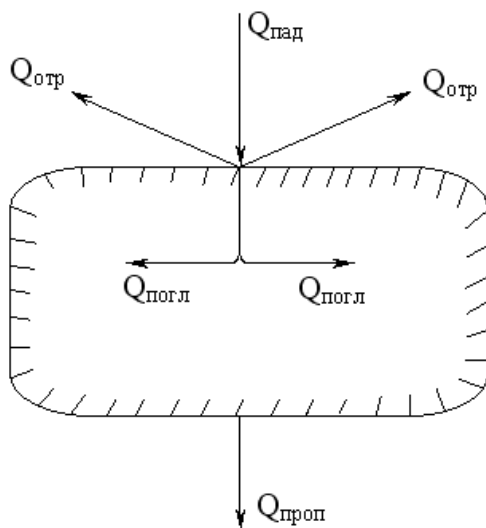


Рис. 1.2. Схема радиационного теплообмена для полупрозрачного тела

С учетом введенных обозначений поглощенный, отраженный и пропущенный тепловые потоки можно рассчитать по формулам:

$$Q_{\text{погл}} = A \cdot Q_{\text{пад}}; \quad Q_{\text{отр}} = R \cdot Q_{\text{пад}}; \quad Q_{\text{проп}} = D \cdot Q_{\text{пад}}. \quad (1.4)$$

В зависимости от числового значения  $A$ ,  $R$  и  $D$  различают *абсолютно черное*, *абсолютно белое* и *абсолютно прозрачное* или *диатермичное* тела.

Тело, которое поглощает все падающее на него излучение, называют *абсолютно черным* телом (АЧТ). Поток и плотность потока собственного излучения АЧТ обозначают  $Q_0$  и  $E_0$  соответственно. У абсолютно черного тела радиационные способности равны:  $A = 1$ ,  $R = D = 0$ .

Тело, которое *диффузно* отражает все падающее на него излучение, называют *абсолютно белым* телом. У абсолютно белого тела радиационные способности равны:  $R = 1$ ,  $A = D = 0$ .

Тело, которое пропускает все падающее на него излучение, называют *абсолютно прозрачным* или *диатермичным*. Для диатермичного тела радиационные способности равны:  $D = 1$ ,  $A = R = 0$ .

Указанных идеальных тел в природе не существует. Однако некоторые реальные тела по своим радиационным свойствам близки к идеальным. Например, у сажи и окисленной шероховатой стали  $A \rightarrow 1$ , у полированных металлов  $R \rightarrow 1$ , у двухатомных газов с симметричными молекулами ( $N_2$ ,  $O_2$ ), в том числе и у сухого воздуха  $D \rightarrow 1$ .

У непрозрачных тел  $D = 0$ ,  $A + R = 1$ . У газов  $R = 0$ ,  $A + D = 1$ .

## Виды лучистых потоков

Излучение тела, обусловленное его тепловым состоянием (степенью нагретости), называют *собственным излучением* этого тела. Поток собственного излучения обозначают  $Q_{\text{соб}}$  или буквой  $Q$  без нижнего индекса. *Плотность потока собственного излучения* обозначают,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ,

$$E_{\text{соб}} = \frac{dQ_{\text{соб}}}{dF}, \text{ или } E = \frac{dQ}{dF} \quad (1.5)$$

и называют *лучеиспускательной способностью* тела. В величине  $E_{\text{соб}}$  заключена вся энергия, излучаемая телом в диапазоне длин волн  $\lambda = 0 \div \infty$ , т.е. энергия излучения всего спектра. Долю лучеиспускательной способности, заключенную в бесконечно малом спектральном диапазоне длин волн  $d\lambda$ , называют *спектральной плотностью потока собственного излучения* или *спектральной лучеиспускательной способностью* тела и обозначают,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ ,

$$E_{\lambda} = \frac{d^2Q}{dF \cdot d\lambda} = \frac{dE}{d\lambda}. \quad (1.6)$$

Зная функцию распределения  $E_{\lambda} = f(\lambda)$ , лучеиспускательную способность тела можно рассчитать, проинтегрировав эту функцию по всему спектру излучения:

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda. \quad (1.7)$$

Спектральную лучеиспускательную способность также называют *спектральной интенсивностью излучения*. Поэтому плотность потока собственного излучения тела (лучеиспускательную способность) ещё называют *интегральной интенсивностью излучения* тела.

Далее рассмотрим схему радиационного теплообмена (см. рис.1.3). На непрозрачное тело падает лучистый поток  $Q_{\text{пад}}$ . Одна часть теплового потока в количестве  $Q_{\text{погл}}$  поглощается телом, а другая – в количестве  $Q_{\text{отр}}$  телом отражается. Тело обладает и собственным излучением  $Q_{\text{соб}}$  ( $Q$ ).

Радиационный тепловой поток, уходящий с поверхности тела, равный сумме собственного и отраженного тепловых потоков называют, *эффективным* тепловым потоком и обозначают  $Q_{\text{эф}}$ . Эффективный тепловой поток по определению равен

$$Q_{\text{эф}} = Q_{\text{соб}} + Q_{\text{отр}} \quad (1.8)$$

Тепловой поток, идущий на изменение теплового состояния тела, называют *результатирующим* тепловым потоком и обозначают  $Q_{\text{рез}}$  или в целях унификации обозначений в расчетах сложного (радиационно-конвективного) теплообмена –  $Q_w$ . В результате радиационного теплообмена тело получает (при нагреве) или отдает (при охлаждении) количество энергии, равное разности между поглощенным и собственным лучистыми тепловыми потоками (см. рис.1.3):

$$Q_w \equiv Q_{\text{рез}} = Q_{\text{погл}} - Q_{\text{соб}} = A \cdot Q_{\text{пад}} - Q_{\text{соб}} \quad (1.9)$$

Результатирующий тепловой поток можно найти, зная падающий и эффективный тепловые потоки:

$$\begin{aligned} Q_w \equiv Q_{\text{д\acute{a}с}} &= (Q_{\text{п\acute{a}д}} + Q_{\text{отр}}) - (Q_{\text{п\acute{а}д}} + Q_{\text{отр}}) = \\ &= Q_{\text{п\acute{а}д}} - Q_{\text{отр}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Замечание. Знак  $\equiv$  следует читать как «соответствует» или «эквивалентная форма записи».

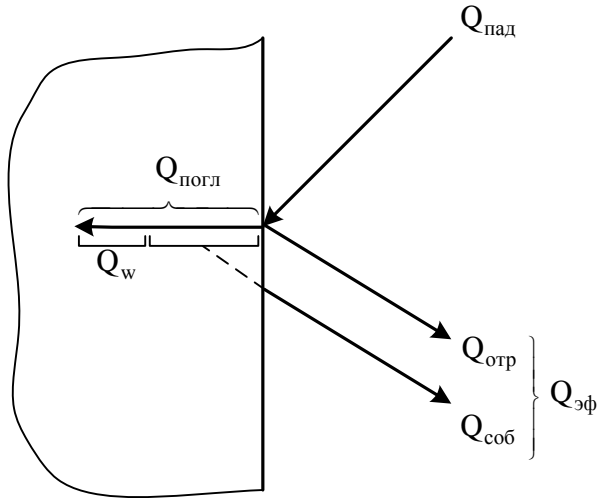


Рис. 1.3. Схема радиационного теплообмена для непрозрачного тела

Если расчет радиационного теплообмена проводят, используя плотности соответствующих радиационных потоков, то в этом случае формулы (1.7) - (1.9) примут вид:

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}}; \quad (1.11)$$

$$q_w \equiv E_{\text{рез}} = E_{\text{погл}} - E_{\text{соб}} = A \cdot E_{\text{пад}} - E_{\text{соб}}; \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} q_w \equiv E_{\text{д\acute{a}\text{c}}} &= (E_{\text{п\grave{a}\text{e}}} + E_{\text{i\grave{o}\delta}}) - (E_{\text{п\grave{a}\delta}} + E_{\text{i\grave{o}\delta}}) = \\ &= E_{\text{i\grave{a}\grave{a}}} - E_{\text{y\grave{o}}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Без вывода приведем формулу связи собственного, результирующего и эффективного потоков излучения

$$Q_{\text{эф}} = \frac{1}{A} \cdot (R \cdot Q_{\text{рез}} + Q_{\text{соб}}), \quad (1.14)$$

или

$$Q_{\text{рез}} = \frac{1}{R} \cdot (A \cdot Q_{\text{эф}} - Q_{\text{соб}}), \quad (1.15)$$

где  $R = 1 - A$  – отражательная способность тела.

## **§1.2. Основные законы излучения абсолютно черного тела**

Спектры излучения реальных тел зависят от многих факторов (материал тела, температура, состояние поверхности), и поэтому их аналитическое описание невозможно. У идеального абсолютно черного тела (АЧТ) распределение энергии по спектру и в зависимости от температуры тела является универсальным, поэтому законы излучения абсолютно черного тела используют в качестве базовых при расчете излучения реальных тел.

Абсолютно черных тел в природе не существует. В качестве модели АЧТ используют отверстие в стенке непрозрачной полости с размерами много меньше самой полости. При равномерном нагреве всей поверхности полости данное отверстие по своим свойствам приближается к абсолютно черному телу, т.е. поглощает все падающее на него излучение и само при этом является идеальным излучателем – излучает максимально возможное количество энергии.

### *Закон Планка*

В 1900 году на основе квантовой теории немецкий физик Макс Планк вывел закон, устанавливающий зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела ( $E_{0,\lambda}$ ) от длины волны ( $\lambda$ ) и абсолютной

температуры ( $T$ ) –  $E_{0,\lambda} = f(\lambda, T)$ . Этот закон носит имя Планка и имеет вид, Вт/м<sup>3</sup>,

$$E_{0,\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda \cdot T}\right) - 1 \right]}, \quad (1.16)$$

где  $T$  – абсолютная температура абсолютно черного тела, по Кельвину;  $C_1$  и  $C_2$  – коэффициенты, связанные с универсальными физическими константами следующими соотношениями:

$$C_1 = 2 \cdot \pi \cdot c_0^2 = 3,741832 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2;$$

$$C_2 = h \cdot c_0 / k = 1,438786 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К},$$

в которых  $c_0 = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

График зависимости  $E_{0,\lambda} = f(\lambda, T)$  изображен на рис. 1.4.

Анализ этого графика позволяет сделать следующие выводы:

– с увеличением температуры спектральная интенсивность излучения ( $E_{0,\lambda}$ ) возрастает для всего спектра;

– зависимость  $E_{0,\lambda} = f(\lambda, T)$  имеет экстремальный характер;

– с увеличением температуры длина волны ( $\lambda_{\max}$ ), при которой наблюдается максимум спектральной плотности потока излучения АЧТ, уменьшается.

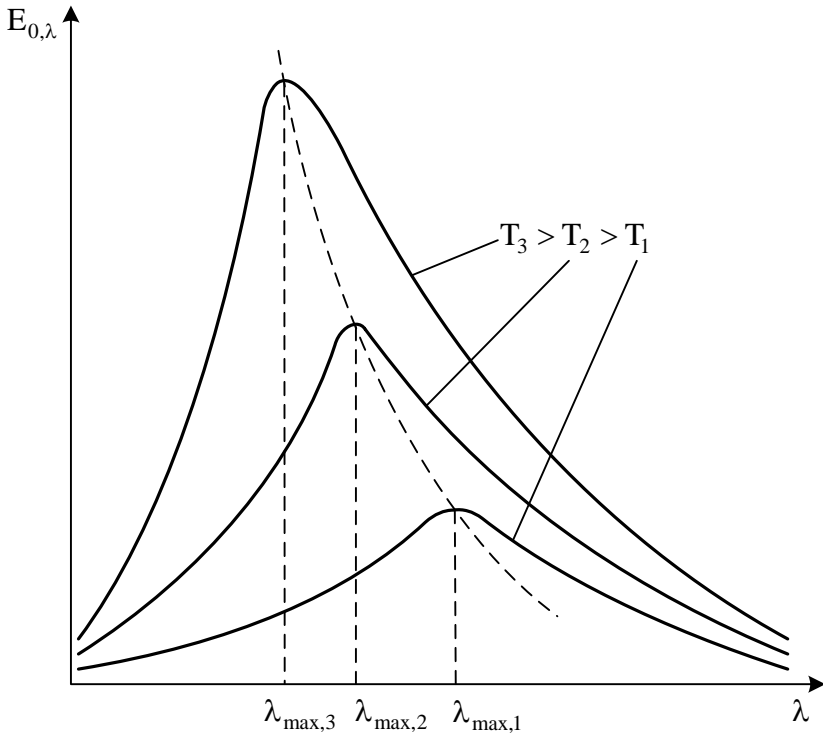


Рис. 1.4. Спектральная плотность потока излучения АЧТ

### *Закон смещения Вина*

Закон смещения Вина можно сформулировать следующим образом. Длина волны, при которой наблюдается максимальное значение спектральной плотности потока собственного излучения ( $\lambda_{max}$ ) и абсолютная температура связаны обратно пропорциональной зависимостью:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2897,82 \text{ мкм} \cdot \text{К} \approx 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (1.17)$$



Этот закон является следствием закона Планка. Однако он был получен Вином ранее (в 1893 году) и поэтому носит его имя. Зная  $\lambda_{\max}$ , по формуле (1.16) легко найти абсолютную температуру излучателя, К,

$$T = 2897,82 / \lambda_{\max} . \quad (1.18)$$

### *Закон Стефана-Больцмана*

Закон Стефана-Больцмана при условии термодинамического равновесия устанавливает зависимость плотности потока собственного излучения абсолютно черного тела ( $E_0$ ) от его абсолютной температуры (Т), Вт/м<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_0^{\infty} E_{0,\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} C_1 \cdot \lambda^{-5} / [\exp(C_2 / \lambda \cdot T) - 1] d\lambda = \\ &= \sigma_0 \cdot T^4, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана-Больцмана.

В расчетах на калькуляторе закон Стефана-Больцмана удобно применять в следующей записи:

$$E_0 = c_0 \cdot \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (1.20)$$

где  $c_0 = 5,67$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Закон Стефана-Больцмана был экспериментально установлен Стефаном в 1879 году, а теоретически обоснован Больцманом в 1884 году, а Планком – в 1901 году.

### §1.3. Излучение реальных тел. Закон Кирхгофа

Излучение реальных тел отличается от излучения абсолютно черного тела как по спектральному составу – виду функции  $E_\lambda = f(\lambda, T)$ , так и по величине (рис.1.5,а). При равных температурах реальные тела излучают тепловой энергии меньше, чем АЧТ. И при этом максимум спектральной плотности потока излучения у металлов смещен в сторону коротковолновой части спектра, а у диэлектриков – в сторону длинноволновой части спектра относительно максимума спектральной плотности потока излучения АЧТ при заданной температуре.

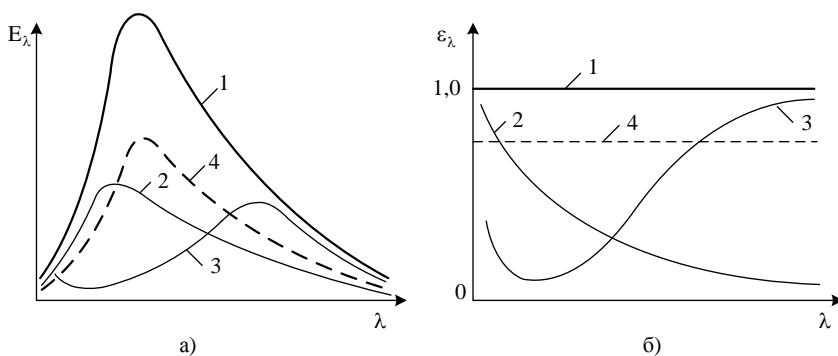


Рис.1.5. Спектральное распределение энергии излучения (а) и степени черноты (б) различных тел:  
1 – АЧТ; 2 – металл; 3 – диэлектрик; 4 – серое тело

Для характеристики излучения реальных тел введено понятие спектральной степени черноты  $\epsilon_\lambda$ , которая характеризует отношение спектральной плотности потока собственного излучения реального тела  $E_\lambda$  к спектральной плотности потока собственного излучения абсолютно черного тела  $E_{0,\lambda}$ :

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{E_{\lambda}}{E_{0,\lambda}} \quad (1.21)$$

Следовательно

$$E_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} \cdot E_{0,\lambda} \quad (1.22)$$

Спектральная степень черноты  $\varepsilon_{\lambda}$  изменяется в пределах от 0 до 1 и для каждой длины волны  $\lambda$  характеризует долю, которую  $E_{\lambda}$  данного тела составляет от  $E_{0,\lambda}$  абсолютно черного тела при одной и той же температуре. Изменение спектральной степени черноты различных тел показано на рис. 1.5,б. Из анализа формулы (1.20) следует, что спектральная степень черноты абсолютно черного тела равна единице.

Спектральная степень черноты реального тела зависит от длины волны, природы тела, состояния его поверхности и температуры.

### *Закон Кирхгофа*

Абсолютно черное тело поглощает все падающее на него излучение ( $A_{\lambda} = 1$ ) и одновременно является идеальным излучателем, у которого  $\varepsilon_{\lambda} = 1$  для всех длин волн. Данное обстоятельство наводит на мысль, что и у реальных тел между спектральной излучательной способностью  $E_{\lambda}$  и его спектральной поглощательной способностью  $A_{\lambda}$  существует однозначная зависимость. Эту зависимость установил немецкий физик Кирхгоф в 1859 году и поэтому ее называют законом Кирхгофа.

По закону Кирхгофа отношение спектральной плотности потока собственного излучения (спектральной лучеиспускательной способности) любого тела к его спектральной поглощательной способности есть величина постоян-

ная и равная спектральной плотности потока АЧТ при той же температуре:

$$E_{0,\lambda} = \frac{E_\lambda}{A_\lambda}. \quad (1.23)$$

Поэтому

$$E_\lambda = A_\lambda \cdot E_{0,\lambda}. \quad (1.24)$$

Сравнивая выражения (1.21) и (1.23), можно сделать вывод о том, что спектральная поглощательная способность равна спектральной степени черноты:

$$A_\lambda = \varepsilon_\lambda. \quad (1.25)$$

Равенство (1.24) является следствием закона Кирхгофа и строго справедливо при локальном термодинамическом равновесии между излучением и веществом, что на практике выполняется не всегда. Однако справедливость допущения о локальном термодинамическом равновесии в расчетах радиационного теплообмена подтверждается результатами экспериментов.

### *Понятие серого тела*

Плотность потока собственного излучения тела в узком элементарном спектральном диапазоне  $d\lambda$  – спектральную плотность теплового потока – можно рассчитать, применив формулу (1.21):

$$E_\lambda = \varepsilon_\lambda \cdot E_{0,\lambda} = \varepsilon_\lambda \cdot \frac{C_1}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda \cdot T}\right) - 1 \right]}. \quad (1.26)$$

Затем, экспериментально установив зависимость спектральной степени черноты от длины волны и температуры

$\varepsilon_\lambda = f(\lambda, T)$  для данного материала, можно найти и лучеиспускательную способность реального тела:

$$E = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \cdot E_{0,\lambda} d\lambda = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda . \quad (1.27)$$

Такой подход к расчету собственного излучения реальных тел весьма сложен из-за необходимости экспериментального определения спектров излучения реальных тел, которые при данной температуре зависят не только от природы вещества, но и от его структуры и состояния поверхности. Поэтому в целях упрощения инженерных расчетов излучение реальных тел моделируют излучением идеального *серого* тела.

Излучение *серого* тела обладает всеми свойствами излучения абсолютно черного тела. При этом спектр излучения *серого* тела подобен спектру излучения АЧТ (штриховая линия на рис. 1.5,а), а его спектральная плотность потока излучения  $E_\lambda$  меньше спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела  $E_{0,\lambda}$  в одинаковое число раз. Другими словами, спектральная степень черноты *серого* тела при данной температуре не зависит от длины волны  $\varepsilon_\lambda = \text{const}$  (штриховая линия на рис. 1.5,б) и равна интегральной степени черноты тела  $\varepsilon = \varepsilon_\lambda = \text{const}$ .

Плотность потока собственного излучения (лучеиспускательная способность) *серого* тела будет равна

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \cdot E_{0,\lambda} d\lambda = \varepsilon \cdot \int_0^\infty E_{0,\lambda} d\lambda = \varepsilon \cdot E_0 = \\ &= \varepsilon \cdot \sigma_0 \cdot T^4 = \varepsilon \cdot c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 = c \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \end{aligned} \quad (1.28)$$

В формуле (1.28) приняты следующие обозначения:  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана–Больцмана;  $c_0 = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела;  $c = \varepsilon \cdot c_0$  – коэффициент излучения серого тела,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  $\varepsilon$  – интегральная степень черноты (степень черноты) тела. Из формулы (1.27) следует, что интегральная степень черноты равна отношению лучеиспускательной способности серого тела ( $E$ ) к лучеиспускательной способности абсолютно черного тела ( $E_0$ )

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0}. \quad (1.29)$$

Следовательно

$$E = \varepsilon \cdot E_0 \quad (1.30)$$

Интегральная степень черноты серого тела (степень черноты) зависит от природы тела, состояния его поверхности и температуры.

Закон Кирхгофа для серого тела имеет вид

$$E_0 = \frac{E}{A} \quad (1.31)$$

и формулируется следующим образом: «Отношение плотности потока собственного излучения (лучеиспускательной способности) серого тела к его поглощательной способности есть величина постоянная и равная плотности потока собственного излучения абсолютно черного тела при условии равенства температур обоих тел».

Из закона Кирхгофа следует, что

$$E = A \cdot E_0. \quad (1.32)$$

Сравнивая выражения (1.30) и (1.32) можно сделать вывод о том, что степень черноты серого тела равна его поглощательной способности

$$\varepsilon = A. \quad (1.33)$$

#### **§1.4. Лучистый теплообмен в замкнутой системе из двух серых тел, разделенных диатермичной средой**

Теоретические положения по расчету радиационного теплообмена в замкнутой системе, состоящей из серых поверхностей, разделенных лучепрозрачной средой, подробно изложены в специальной литературе [1–3, 7].

Для замкнутой системы радиационного теплообмена, состоящей из двух тел (рис.1.6), справедливо равенство, которое следует из закона сохранения лучистой энергии

$$Q_{w,2} + Q_{w,1} = 0, \quad (1.34)$$

где  $Q_{w,1}$  и  $Q_{w,2}$  – результирующие тепловые потоки первого и второго тела, Вт.

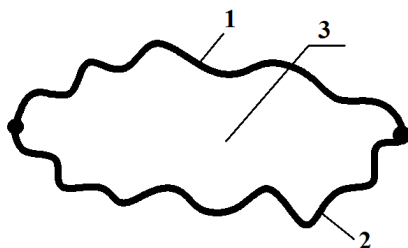


Рис. 1.6. К расчету излучения двух серых поверхностей, разделённых диатермичной средой:  
1, 2 – твердые серые тела; 3 – диатермичное тело

Поток результирующего излучения в замкнутой системе, состоящей из двух серых поверхностей, разделенных диатермичной средой, рассчитывают по формуле

$$Q_{w,1} = -Q_{w,2} = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot \sigma_0 \cdot (T_2^4 - T_1^4) \cdot \varphi_{21} \cdot F_2; \quad (1.35)$$

или

$$Q_{w,1} = -Q_{w,2} = c_{\text{пр}} \cdot \left[ \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \right] \cdot \varphi_{21} \cdot F_2, \quad (1.36)$$

где  $T$  – абсолютная температура поверхности теплообмена, К;  $F$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>;  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  – угловые коэффициенты излучения соответственно с первого тела на второе и со второго тела на первое;  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты в системе двух тел;  $c_{\text{пр}} = c_0 \cdot \varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенный коэффициент излучения в системе двух серых тел;  $c_0 = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Приведенную степень черноты и приведенный коэффициент излучения в замкнутой системе радиационного теплообмена, состоящей из двух серых тел, рассчитывают по формулам:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) \varphi_{12} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \varphi_{21}}; \quad (1.37)$$

$$c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} + \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0} \right) \varphi_{12} + \left( \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right) \varphi_{21}}, \quad (1.38)$$



где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – степени черноты поверхностей;  
 $c_1 = \varepsilon_1 \cdot c_0$  – коэффициент излучения первого тела;  
 $c_2 = \varepsilon_2 \cdot c_0$  – коэффициент излучения второго тела.

### *Угловые коэффициенты излучения*

Угловым коэффициентом излучения (коэффициентом облученности) называют величину, которая определяет долю лучистой энергии приходящей на данное тело с другого тела. Угловой коэффициент излучения зависит только от взаимного расположения тел в пространстве и поэтому является чисто геометрической величиной [1–3, 7].

Угловые коэффициенты находят аналитически, численно – методом статистических испытаний, экспериментально – по величине освещенности тел и используя свойства угловых коэффициентов. В общем случае выделяют семь свойств угловых коэффициентов: замкнутости, взаимности, невогнутости, затененности, совмещаемости, распределительности и аддитивности [7].

Угловые коэффициенты излучения (коэффициенты облученности) в системе, состоящей из двух поверхностей, можно рассчитать, используя только три первых свойства угловых коэффициентов:

а) свойство замкнутости (замыкаемости)

$$\sum_{k=1}^n \varphi_{ik} = 1; \quad (1.39)$$

б) свойство взаимности

$$\varphi_{ik} \cdot F_i = \varphi_{ki} \cdot F_k; \quad (1.40)$$

в) свойство невогнутости (для плоских и выпуклых поверхностей)

$$\varphi_{ii} = 0. \quad (1.41)$$

### Частные случаи расчета РТО

Рассмотрим случаи радиационного теплообмена для наиболее часто встречающихся на практике систем теплообмена, которые можно представить в виде системы из двух серых тел (рис. 1.7).

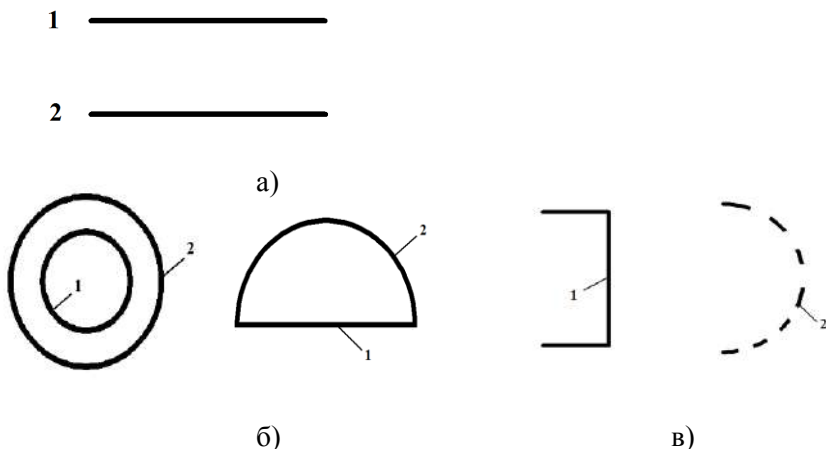


Рис. 1.7. Система РТО из двух серых тел

Для двух плоских параллельных поверхностей (рис. 1.7,а), используя свойство замыкаемости (1.39) и невогнутости (1.41), несложно получить

$$\varphi_{1-1} = 0; \quad \varphi_{1-2} = 1; \quad \varphi_{2-2} = 0; \quad \varphi_{2-1} = 1. \quad (1.42)$$

И в этом случае приведенная степень черноты будет равна

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (1.43)$$

Для системы, состоящей из двух тел, из которых одно тело невогнутое, а другое облучает само себя (вогнутое) (рис. 1.7, б), угловые коэффициенты находят решением системы алгебраических уравнений, записанных на основе всех перечисленных выше свойств угловых коэффициентов

$$\begin{cases} \varphi_{1-1} + \varphi_{1-2} = 1 \\ \varphi_{2-2} + \varphi_{2-1} = 1 \\ \varphi_{1-2} \cdot F_1 = \varphi_{2-1} \cdot F_2 \\ \varphi_{1-1} = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Решение системы алгебраических уравнений (1.44) имеет вид

$$\varphi_{1-1} = 0; \quad \varphi_{1-2} = 1; \quad \varphi_{2-2} = 1 - \frac{F_1}{F_2}; \quad \varphi_{2-1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (1.45)$$

Подставляя решение (1.45) в формулу для приведенной степени черноты (1.37), получим:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot \frac{F_1}{F_2}}. \quad (1.46)$$

Третий частный случай радиационного теплообмена в системе из двух тел можно рассматривать как теплообмен между невогнутым телом и телом, размеры которого во много раз больше размеров первого тела. Такого рода теплообмен имеет место, например, при расчете лучистой составляющей тепловых потерь с поверхности теплотехнических агрегатов, тепловых потерь излучением ограждающими конструкциями зданий и сооружений и т.п. Систему тел, показанную на рис. 1.7,в, можно рассматривать как частный случай системы тел рис. 1.7,б при условии

$F_2 \gg F_1$ . Поэтому из формулы (1.46) следует, что приведенная степень черноты для системы тел рис. 1.7, в равна степени черноты первого тела:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_1. \quad (1.47)$$

### **§1.5. Лучистый теплообмен между газом и окружающей его замкнутой серой оболочкой**

Теоретические положения по расчету радиационного теплообмена между излучающим и поглощающим газом и окружающей его замкнутой серой оболочкой подробно изложены в научных источниках [1–3, 7].

В инженерных расчетах лученепрозрачный газ – газ излучающий и поглощающий излучение – считают серым телом, а его объемное излучение заменяют излучением оболочки, в которую заключен газ. Поэтому плотность потока собственного излучения газа рассчитывают по формуле

$$\begin{aligned} E_g &= \varepsilon_g \cdot E_{0,g} = \varepsilon_g \cdot \sigma_0 \cdot T_g^4 = \\ &= \varepsilon_g \cdot c_0 \cdot \left( \frac{T_g}{100} \right)^4 = c_g \cdot \left( \frac{T_g}{100} \right)^4, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где  $\varepsilon_g$  – степень черноты газа;  $c_g = \varepsilon_g \cdot c_0$  – коэффициент излучения газа, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $T_g$  – температура газа, К.

Расчет радиационного теплообмена между серым газом и окружающей его замкнутой серой оболочкой выполняют по формуле Нуссельта:

$$Q_w = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot \sigma_0 \cdot (T_g^4 - T_w^4) \cdot F_w, \quad (1.49)$$

где  $Q_w$  – результирующий тепловой поток излучением, воспринимаемый оболочкой, Вт;  $T_g$  и  $T_w$  – температуры

газа и оболочки, К;  $F_w$  – площадь поверхности оболочки, м<sup>2</sup>. Приведенную степень черноты в системе газ–оболочка  $\varepsilon_{пр}$  рассчитывают по формуле

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_r} + \frac{1}{\varepsilon_w} - 1}, \quad (1.50)$$

где  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_w$  – степень черноты газа и оболочки соответственно.

Степень черноты газа зависит от его состава, температуры и объема, который занимает газ. Для продуктов сгорания энергетического топлива степень черноты газа рассчитывают по формуле

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{CO_2} + \beta \cdot \varepsilon_{H_2O}^* + \varepsilon_{SO_2} + \varepsilon_{CO}, \quad (1.51)$$

где  $\varepsilon_{CO_2}$  – степень черноты углекислого газа;  $\varepsilon_{H_2O} = \beta \cdot \varepsilon_{H_2O}^*$  – степень черноты водяного пара;  $\varepsilon_{H_2O}^*$  – условная степень черноты водяного пара;  $\beta$  – поправочный коэффициент, учитывающий особенности излучения водяного пара;  $\varepsilon_{SO_2}$  – степень черноты сернистого газа;  $\varepsilon_{CO}$  – степень черноты окиси углерода. Степени черноты перечисленных газов определены экспериментально и в зависимости от их парциального давления, длины пути луча и температуры приведены в специальной литературе [1–3] в виде номограмм (рис. 1.8, рис. 1.9 и рис. 1.10)

$$\varepsilon_{r,i} = f(p_i \cdot \ell, T_r), \quad (1.52)$$

где  $p_i$  – парциальное давление  $i$  – го газа, кПа;  $T_r$  – температура газа, °С (К);  $\ell$  – толщина слоя газа, м.

Поправочный коэффициент  $\beta$  находят по номограмме [1-3] в виде  $\beta = f(p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \ell, p_{\text{H}_2\text{O}})$  (рис. 1.8,в).

Для газового объема произвольной формы в качестве толщины газового слоя используют эффективную длину пути луча, которую рассчитывают по формуле:

$$\ell = S_{\text{эф}} = 3,6 \cdot \frac{V_{\text{r}}}{F_{\text{r}}}, \quad (1.53)$$

где  $V_{\text{r}}$  – объем, занимаемый газом,  $\text{м}^3$ ;  $F_{\text{r}}$  – площадь оболочки, в которую заключен газ,  $\text{м}^2$ .

В расчетах на компьютере экспериментальные данные о степени черноты газов аппроксимируют аналитическими выражениями [5]:

$$\varepsilon_{\text{RO}_2} = \exp \left\{ - \left[ \begin{array}{l} 1,4918 + 0,3980 \cdot C_{\text{RO}_2}^{-0,2609} + \\ + (0,053 - 0,1239 \cdot C_{\text{RO}_2}^{0,1718}) \cdot (T/100) + \\ + (0,003504 + 0,0009446 \cdot C_{\text{RO}_2}^{0,5470}) \cdot (T/100)^2 \end{array} \right] \right\}; \quad (1.54)$$

$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = \exp \left[ \begin{array}{l} 0,5708 - 1,2016 \cdot C_{\text{H}_2\text{O}}^{-0,2146} - \\ - (0,0038 + 0,05133 \cdot C_{\text{H}_2\text{O}}^{-0,2105}) \cdot (T/100) \end{array} \right]; \quad (1.55)$$

$$\beta = 1 + (-5,0 + 5,3114 \cdot C_{\text{H}_2\text{O}}^{-0,01191}) \cdot p_{\text{H}_2\text{O}}^{0,74+0,03705C_{\text{H}_2\text{O}}^{-0,1561}}, \quad (1.56)$$

где  $C_{\text{RO}_2} = p_{\text{RO}_2} \cdot \ell$  – оптическая плотность газов  $\text{RO}_2 = \text{CO}_2 + \text{SO}_2$ ;  $p_{\text{RO}_2}$  – парциальное давление газов  $\text{RO}_2 = \text{CO}_2 + \text{SO}_2$ ,  $\text{кгс}/\text{см}^2$ ;  $C_{\text{H}_2\text{O}} = p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \ell$  – оптическая плотность водяного пара,  $\text{кгс}/\text{см}^2$ ;  $T$  – температура газа,  $^{\circ}\text{C}$ .

Формулы (1.54) и (1.55) получены при  $C = 0,01 \div 1,0$  и  $T = 600 \div 1800$   $^{\circ}\text{C}$ , а формула (1.56) –  $C = 0,015 \div 3,0$  и

$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 0 \div 6 \text{ кг/см}^2$ . Средняя погрешность аппроксимации  $\varepsilon_r$  формулами (1.54), (1.55) и (1.56) по данным [5] не превышает 2,3%.

В инженерных расчетах вводят поправку на светимость факела из-за содержания в продуктах сгорания сажи-стых частиц, увеличивая степень черноты газа, рассчитанную по формуле (1.51), в 1,5 раза для газового факела и в 2,5 раза для мазутного факела. При этом степень черноты газа не может быть больше единицы.

В расчетах теплоотдачи лучистый тепловой поток от газа к стенке иногда удобно представить в виде закона теплоотдачи Ньютона:

$$Q_{\text{л}} = \alpha_{\text{л}} \cdot (T_{\text{г}} - T_{\text{w}}) \cdot F_{\text{w}}, \quad (1.57)$$

где  $\alpha_{\text{л}}$  – коэффициент теплоотдачи излучением, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Коэффициент теплоотдачи излучением (*лучистой* теплоотдачи) рассчитывают по формуле

$$\alpha_{\text{л}} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} \cdot \sigma_0 \cdot (T_{\text{г}}^4 - T_{\text{w}}^4)}{T_{\text{г}} - T_{\text{w}}}, \quad (1.58)$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты, (см. формулу (1.50)).

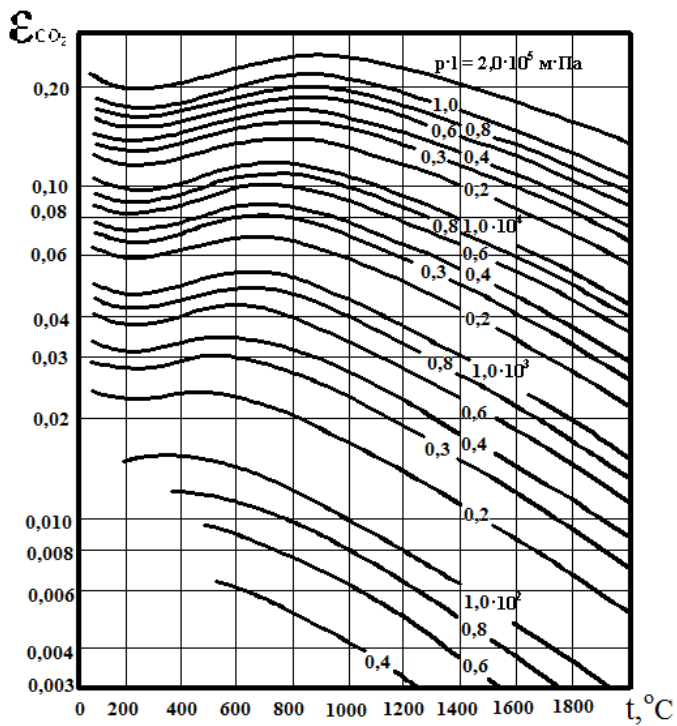


Рис. 1.8. Степень черноты углекислого газа



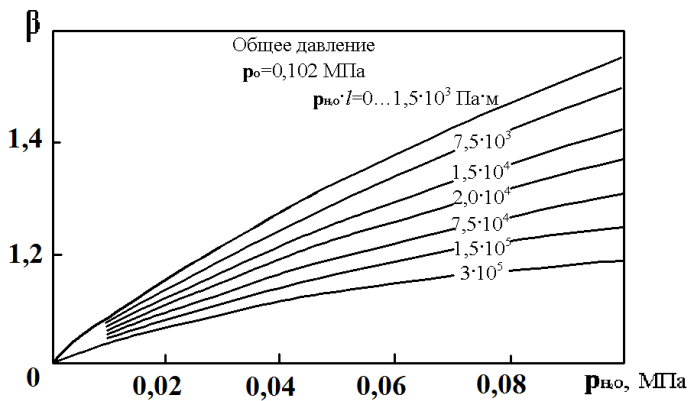
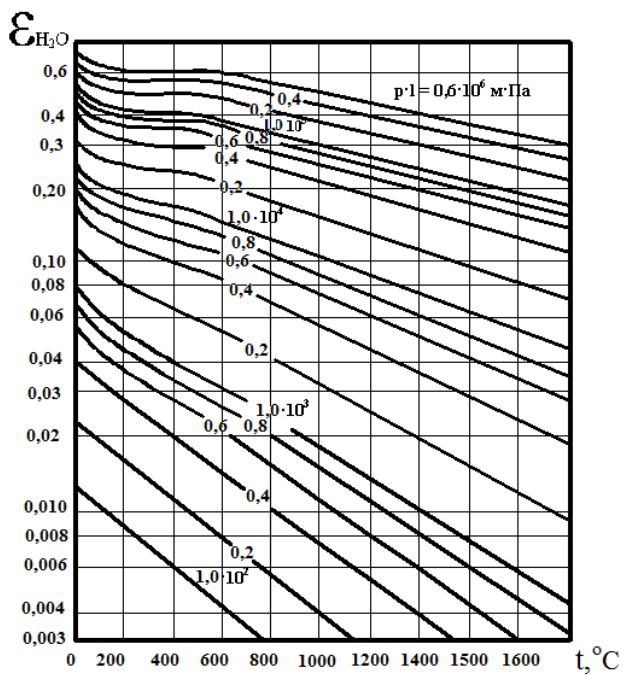


Рис. 1.9. Степень черноты водяного пара

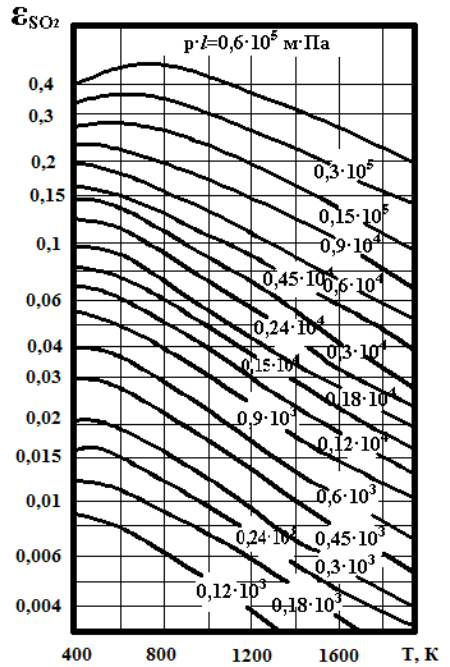
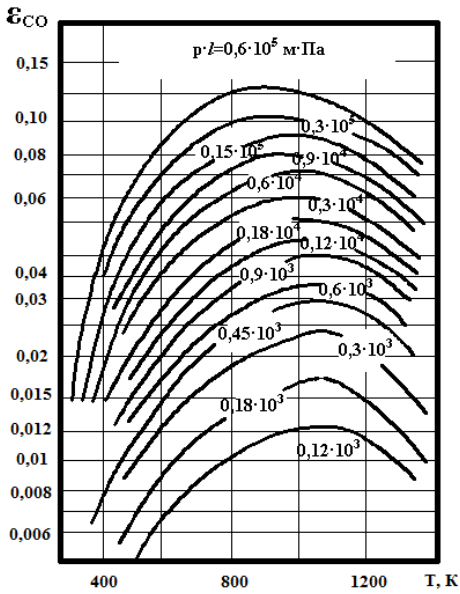


Рис. 1.10. Степень черноты CO и SO<sub>2</sub>

## РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ ЗОНАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА

Цель расчета радиационного теплообмена – определение температур (потоков собственного излучения) и потоков результирующего излучения всех поверхностных и объемных зон. При этом другие виды потоков радиационного излучения (падающего, поглощенного, эффективного и т.д.) интересуют нас только как вспомогательные величины для расчета результирующего излучения.

### § 2.1. Постановка задачи расчета радиационного теплообмена

Задачи *радиационного* теплообмена в системе твердых тел и газовых объемов в зависимости от входных и выходных параметров подразделяют на *прямые, обратные и смешанные*.

В *прямых* задачах радиационного теплообмена заданными (входными) параметрами считают температуры твердых поверхностей и газовых объемов, а искомыми (выходными) параметрами – тепловыделения в газовых объемах и результирующие тепловые потоки на твердых поверхностях.

В *обратных* задачах радиационного теплообмена, наоборот, заданными (входными) параметрами считают тепловыделения в газовых объемах и результирующие тепловые потоки на твердых поверхностях, а искомыми (выходными) параметрами – температуры твердых поверхностей и газовых объемов.

В *смешанных* задачах радиационного теплообмена для одних газовых объемов и твердых поверхностей входными параметрами являются температуры, а выходными – тепловыделения и результирующие тепловые потоки; для дру-

гих газовых объемов и твердых поверхностей заданы тепловыделения или результирующие тепловые потоки, а требуется найти температуры.

В теории радиационного теплообмена существует постановка задачи расчета параметров *РТО*, при которой в газовых объемах заданы *функциональная зависимость* между тепловыделениями и температурами объемных зон и *функциональная зависимость* между результирующими тепловыми потоками и температурами для поверхностных зон. При этом значения тепловыделений и температур для газовых объемов и значения результирующих тепловых потоков и температур, ограничивающих объем поверхностей, определяют в ходе расчета. Такую постановку задачи радиационного теплообмена называют *неявнозаданной*. В неявнозаданной постановке можно решить задачи не только радиационного теплообмена, но и задачи *внешнего радиационно – конвективного* теплообмена.

## § 2.2. Понятие зонального метода расчета

При расчете радиационного теплообмена функциональные зависимости между входными и выходными параметрами определяются геометрией системы и радиационными свойствами твердых и газовых тел. Идея зональных методов расчета заключается в разбиении всех твердых поверхностей на дискретные участки (поверхностные зоны), а газовых объемов – на конечные объемы (объемные зоны), в пределах которых температуру, тепловые потоки и радиационные свойства тел можно считать постоянными [4].

Разобьем поверхность, ограничивающую газ на  $m$  поверхностных зон, а газовый объем – на  $n$  объемных зон. Введем следующую нумерацию зон:

$i = 1, \dots, m$  – поверхностные зоны;

$i = m + 1, \dots, l$  – объемные зоны;

$l = m + n$  – суммарное число зон.

В дальнейшем для наглядности изложения будем использовать следующую систему обозначений: нижний индекс (индексы) параметра будет обозначать номер зоны, а верхний индекс – вид излучения. Например,

$T_i$  – температура  $i$  - й зоны;

$Q_i^p$  – результирующий тепловой поток  $i$  - й зоны;

$Q_i^{\text{соб}}$  – собственный тепловой поток  $i$  - й зоны;

$Q_i^{\text{эф}}$  – эффективный тепловой поток  $i$  - й зоны;

$Q_i^{\text{пад}}$  – падающий тепловой поток  $i$  - й зоны;

и т.д.

Для каждой зоны в соответствии с постановкой задачи расчета радиационного теплообмена один из двух параметров – температура зоны ( $T_i$ ) или результирующий тепловой поток ( $Q_i^p$ ) – задан по условию, а другой является искомым. В зависимости от того, какой параметр задан, различают зоны I - го и II - го рода. Для зон I - го рода заданы температуры ( $T_i$ ), а искомыми являются потоки результирующего излучения ( $Q_i^p$ ). Для зон II - го рода заданы потоки результирующего излучения ( $Q_i^p$ ), а требуется найти температуру зон ( $T_i$ ). Поэтому при прямой постановке задачи расчета РТО все зоны – зоны I - го рода, при обратной постановке задачи – все зоны – зоны II - го рода, при смешанной – есть зоны и I - го и II - го рода. При неявнозаданной постановке задачи расчета РТО для всех зон неизвестными являются и температуры, и тепловые потоки при заданной функциональной зависимости между ними. Такие зоны называют зонами III - го рода. Неявнозаданные задачи РТО решают методом последовательных приближений (методом итераций) задавая в первом приближении либо температуры зон, либо тепловые потоки. Поэтому неявнозаданная задача рас-

чета сводится к решению или прямой задачи с использованием зон I - го рода, или к решению обратной задачи с использованием зон II - го рода.

Итак, решение задачи радиационного теплообмена для зон каждого из трех родов сводится к определению:

– потоков результирующего излучения  $Q_i^{\text{рез}}$  (для зон I - го рода);

– температур или потоков собственного излучения  $Q_i^{\text{соб}}$  (для зон II - го рода);

– потоков результирующего излучения и температур (для зон III - го рода).

### **§ 2.3. Обобщенные и разрешающие угловые коэффициенты излучения**

При решении задач радиационного теплообмена зональными методами наряду с угловыми коэффициентами излучения используют *обобщенные* угловые коэффициенты и *разрешающие* угловые коэффициенты.

#### *Обобщенные угловые коэффициенты*

Обобщенные угловые коэффициенты используют для установления функциональной связи падающего и эффективного радиационных тепловых потоков в *классическом* зональном методе.

*Обобщенным* угловым коэффициентом излучения (коэффициентом облученности) называют величину, которая определяет долю лучистой энергии, приходящей на данное тело с другого тела с учетом ослабления (поглощения и рассеяния) энергии лученепрозрачным газом, расположенным между телами. Таким образом, обобщенный угловой коэффициент характеризует взаимное расположение тел в пространстве и учитывает частичное поглощение (при от-

сутствии рассеяния) лучистой энергии газом в процессе РТО. По определению

$$\Psi_{ki} = \varphi_{ki}(1 - A_{r(ki)}) = \varphi_{ki}(1 - \varepsilon_{r(ki)}), \quad (2.1)$$

где  $\Psi_{ki}$  – обобщенный угловой коэффициент излучения с зоны  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону;  $\varphi_{ki}$  – угловой коэффициент излучения с зоны  $k$  - й поверхностной зоны на  $i$  - ю поверхностную зону;  $A_{r(ki)}$  – поглощательная способность газа на пути луча между зонами  $k$  и  $i$ ;  $\varepsilon_{r(ki)}$  – степень черноты объема газа между зонами  $k$  и  $i$ .

Если газ считать *серым* и пренебречь рассеянием излучения, то в этом случае его поглощательная способность и степень черноты равны

$$A_{r(ki)} = \varepsilon_{r(ki)}. \quad (2.2)$$

Для диатермичной среды  $A_{r(ki)} = 0$  и обобщенный угловой коэффициент совпадает с угловым коэффициентом излучения  $\Psi_{ki} = \varphi_{ki}$ .

Свойство замыкаемости для обобщенных угловых коэффициентов имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \Psi_{ki} + \sum_{i=m+1}^1 \Psi_{ki} A_i = 1, \quad (2.3)$$

где  $\sum_{i=m+1}^1 \Psi_{ki} A_i = A_{r(k)}$  – поглощательная способность газа для эффективного излучения  $k$  - й зоны. Поэтому можно записать

$$\sum_{i=1}^m \Psi_{ki} = 1 - A_{r(k)} = D_{r(k)}, \quad (2.4)$$

где  $D_{r(k)}$  – пропускательная способность газа для эффективного излучения  $k$ -й зоны. Итак, из выражения (2.4) следует, что сумма обобщенных угловых коэффициентов с зоны  $k$  по всем поверхностным зонам равна пропускательной способности газа. Выражение (2.4) можно понимать и как применение закона сохранения энергии для замкнутой системы тел, разделенных излучающим и поглощающим газом.

Для диатермичных (лучепрозрачных) сред  $A_{r(k)} = 0$  поэтому выражение (2.4) представляет собой свойство замкнутости для угловых коэффициентов излучения

$$\sum_{i=1}^m \psi_{ki} = \varphi_{ki} = 1. \quad (2.5)$$

Таким образом, обобщенный угловой коэффициент излучения  $\psi_{ki}$  определяет долю (вклад) эффективного излучения  $k$ -й зоны в суммарный лучистый поток от всех поверхностных зон при наличии поглощающей среды, падающий на  $i$ -ю зону

$$Q_{ki}^{\text{пад}} = Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki}, \quad (2.6)$$

где  $Q_{ki}^{\text{пад}}$  – доля потока эффективного излучения  $k$ -й зоны падающая на  $i$ -ю зону.

Для определения полной величины потока падающего излучения на  $i$ -ю зону, очевидно, необходимо просуммировать падающие лучистые потоки от всех поверхностных зон

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki}. \quad (2.7)$$



## Разрешающие угловые коэффициенты излучения

Разрешающие угловые коэффициенты используют для установления функциональной связи результирующего и собственного радиационных тепловых потоков в *резольвентном* зональном методе.

*Разрешающим* угловым коэффициентом излучения (коэффициентом облученности) называют величину, которая определяет долю лучистой энергии, приходящей на данное тело с другого тела с учетом всех переотражений от поверхностных зон и поглощений энергии лученепрозрачным газом. Таким образом, разрешающий угловой коэффициент характеризует взаимное расположение тел в пространстве, учитывает все переотражения и частичное поглощение лучистой энергии газом в процессе радиационного теплообмена. Поэтому при помощи разрешающих угловых коэффициентов можно учесть все переотражения без использования понятия эффективного излучения.

Разрешающие угловые коэффициенты излучения находят решением системы алгебраических уравнений:

$$\Psi_{ki} = \psi_{ki} + \sum_{j=1}^m \psi_{kj} \cdot R_j \cdot \Psi_{ji}, \quad (2.8)$$

где  $\Psi_{ki}$  – разрешающий угловой коэффициент с  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону;  $\psi_{ki}$  – обобщенный угловой коэффициент с  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону;  $\psi_{kj}$  – обобщенный угловой коэффициент с  $k$  - й зоны на  $j$  - ю зону;  $R_j = 1 - A_j$  – отражательная способность  $j$  - й зоны;  $\Psi_{ji}$  – разрешающий угловой коэффициент с  $j$  - й зоны на  $i$  - ю зону.

Суммирование в правой части формулы (2.8) проводят только для поверхностных зон, поскольку для объемных зон отражательные способности равны нулю ( $R_j = 0$  при  $j = m + 1, \dots, 1$ ).

Первое слагаемое в правой части системы уравнений характеризует долю собственного излучения  $k$  - й зоны, которое достигло  $i$  - й зоны непосредственно без переотражений. Каждое слагаемое  $\psi_{kj} R_j \Psi_{ki}$  под знаком суммы определяет долю собственного излучения, которая попадает с  $k$  - й зоны на некоторую  $j$  - ю поверхностную зону, отражается от неё и, затем переотражаясь от всех поверхностных зон, попадает на  $i$  - ю зону.

Заметим, что для системы тел, разделенных диатермичной средой, обобщенные угловые коэффициенты равны угловым коэффициентам излучения и в этом случае система уравнений (2.8) примет вид

$$\Psi_{ki} = \varphi_{ki} + \sum_{j=1}^m \varphi_{kj} \cdot R_j \cdot \Psi_{ji}, \quad (2.9)$$

где  $\varphi_{ki}$  – угловой коэффициент излучения с зоны  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону;  $\varphi_{kj}$  – угловой коэффициент излучения с  $k$  - й зоны на  $j$  - ю зону.

Свойство замкнутости для разрешающих угловых коэффициентов имеет вид

$$\sum_i \Psi_{ki} \cdot A_i = 1. \quad (2.10)$$

Согласно закону сохранения энергии всё собственное излучение каждой  $k$  - й зоны полностью поглощается внутри данной замкнутой системы.

На основании вышесказанного ещё раз отметим, что разрешающий угловой коэффициент излучения  $\Psi_{ki}$  определяет долю (вклад) собственного излучения  $k$  - й зоны в лучистый поток, падающий на  $i$  - ю зону

$$Q_{ki}^{\text{над}} = Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki}, \quad (2.11)$$

где  $Q_{ki}^{\text{пад}}$  – доля потока собственного излучения  $k$ -й зоны падающая на  $i$ -ю зону;  $Q_k^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения  $k$ -й зоны;  $\Psi_{ki}$  – разрешающий угловой коэффициент с  $k$ -й зоны на  $i$ -ю зону.

Для определения полной величины потока падающего излучения на  $i$ -ю зону просуммируем падающие лучистые потоки на эту зону

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.12)$$

## **§ 2.4. Классический зональный метод расчета радиационного теплообмена**

### *Основные формулы*

Запишем основные формулы для расчета зональных тепловых потоков из раздела 1, используя обозначения, принятые в §2.2.

Формула (1.8) для эффективного теплового потока  $i$ -й поверхностной зоны примет вид

$$\begin{aligned} Q_i^{\text{эф}} &= Q_i^{\text{отр}} + Q_i^{\text{соб}} = (1 - A_i) \cdot Q_i^{\text{пад}} + Q_i^{\text{соб}} = \\ &= R_i \cdot Q_i^{\text{пад}} + Q_i^{\text{соб}}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}, \quad (2.13)$$

где  $A_i$  – поглощательная способность  $i$ -й поверхностной зоны;  $R_i = 1 - A_i$  – отражательная способность  $i$ -й поверхностной зоны.

Для объемных газовых зон отражательная способность равна нулю, поэтому для этих зон эффективный тепловой поток равен собственному тепловому потоку

$$Q_i^{\text{эф}} = Q_i^{\text{соб}}, \quad i = m + 1, \dots, l. \quad (2.14)$$

Формулу (1.9) расчета результирующего теплового потока для поверхностных и объемных зон перепишем в виде

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{погл}} - Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot Q_i^{\text{пад}} - Q_i^{\text{соб}}. \quad (2.15)$$

Для поверхностных зон результирующий тепловой поток можно выразить через поток эффективного излучения по формуле (1.10), которая в зональной форме записи принимает вид

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{пад}} - Q_i^{\text{эф}}. \quad (2.16)$$

Зная потоки собственного и эффективного излучения, результирующий тепловой поток находят по формуле (1.15), которую в зональных методах записывают как

$$Q_i^{\text{рез}} = \frac{1}{R_i} \cdot (A_i \cdot Q_i^{\text{эф}} - Q_i^{\text{соб}}). \quad (2.17)$$

Расчет радиационного теплообмена классическим зональным методом выполняют в два этапа. На первом этапе рассчитывают эффективные тепловые потоки всех зон  $Q_i^{\text{эф}}$ , а затем в зависимости от постановки задачи рассчитывают неизвестные температуры зон  $T_i$  (или потоки собственного излучения  $Q_i^{\text{соб}}$ ) для зон II - го рода и результирующие тепловые потоки ( $Q_i^{\text{рез}}$ ) для зон I - го рода.

### *Система зональных уравнений*

Рассмотрим систему тел, состоящую из поверхностных зон I - го и II - го рода и объемных зон I - го и II - го рода. Для определенности будем считать, что эта система тел содержит:

- $m_1$  поверхностных зон I - го рода ( $i = 1, \dots, m_1$ );
- $m_2$  поверхностных зон II - го рода ( $i = m_1 + 1, \dots, m$ );
- $n_1$  объемных зон I - го рода ( $i = m + 1, \dots, m + n_1$ );

–  $n_2$  поверхностных зон II - го рода ( $i = m + n_1 + 1, \dots, l$ ).

Используя формулы (2.13) ÷ (2.16), запишем уравнения для расчета эффективных тепловых потоков для каждой из указанных зон.

Применяя формулу (2.13) для расчета эффективных тепловых потоков для поверхностных зон I - го рода получим

$$Q_i^{\text{эф}} = R_i \cdot Q_i^{\text{пад}} + Q_i^{\text{соб}}, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad (2.18)$$

где падающий на  $i$  - ю поверхностную зону поток рассчитывают по формуле (2.7), с учетом которой выражение (2.18) принимает вид

$$Q_i^{\text{эф}} = R_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki} + Q_i^{\text{соб}}, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad (2.19)$$

где  $Q_i^{\text{соб}} = \varepsilon_i \cdot \sigma_0 T_i^4 \cdot F_i$  – поток собственного излучения  $i$  - й зоны.

Применяя формулу (2.16) для расчета эффективных тепловых потоков для поверхностных зон II - го рода, получим

$$Q_i^{\text{эф}} = Q_i^{\text{пад}} - Q_i^{\text{рез}}, \quad i = m_1 + 1, \dots, m, \quad (2.20)$$

где падающий на  $i$  - ю поверхностную зону поток рассчитывают по формуле (2.7), с учетом которой выражение (2.20) принимает вид

$$Q_i^{\text{эф}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{\text{рез}}, \quad i = m_1 + 1, \dots, m. \quad (2.21)$$

Согласно формуле (2.14) для объемных зон I - го рода эффективный тепловой поток равен потоку собственного излучения объемной зоны, т.к. отражательная способность объемных зон равна нулю

$$Q_i^{\text{эф}} = Q_i^{\text{соб}}, \quad i = m + 1, \dots, m + n_1. \quad (2.22)$$

Учитывая равенство (2.14), перепишем формулу (2.15) для объемных зон II - го рода:

$$Q_i^{pez} = A_i \cdot Q_i^{пад} - Q_i^{эф}, \quad i = m + n_1 + 1, \dots, l. \quad (2.23)$$

Выражая из формулы (2.23) эффективный тепловой поток  $i$  - й объемной зоны II - го рода, получим

$$Q_i^{эф} = A_i \cdot Q_i^{пад} - Q_i^{pez}, \quad i = m + n_1 + 1, \dots, l, \quad (2.24)$$

где падающий на  $i$  - ю объемную зону поток рассчитывают по формуле (2.7), с учетом которой выражение (2.23) принимает вид

$$Q_i^{эф} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{эф} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{pez}, \quad i = m + n_1 + 1, \dots, l. \quad (2.25)$$

В итоге получена система из  $l = m + n$  зональных уравнений относительно  $l = m + n$  неизвестных эффективных тепловых потоков  $Q_i^{эф}$ , ( $i = 1, \dots, l$ ):

$$\begin{cases} Q_i^{эф} = R_i \cdot \sum_k Q_k^{эф} \cdot \psi_{ki} + Q_i^{cob}, \quad i = 1, \dots, m_1 \\ Q_i^{эф} = \sum_k Q_k^{эф} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{pez}, \quad i = m_1 + 1, \dots, m \\ Q_i^{эф} = Q_i^{cob}, \quad i = m + 1, \dots, m + n_1 \\ Q_i^{эф} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{эф} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{pez}, \quad i = m + n_1 + 1, \dots, l. \end{cases} \quad (2.26)$$

Решая систему уравнений (2.26), находят значения неизвестных эффективных тепловых потоков  $Q_i^{эф}$  для всех поверхностных и объемных зон. Затем рассчитывают потоки результирующего излучения  $Q_i^{pez}$  для поверхностных зон I - го рода ( $i = 1, \dots, m_1$ ) и объемных зон I - го рода ( $i = m + 1, \dots, m + n_1$ ) и значения температур  $T_i$  - для по-

верхностных зон II - го рода ( $i = m_1 + 1, \dots, m$ ) и объемных зон II - го рода ( $i = m + n_1 + 1, \dots, l$ ).

Результирующий тепловой поток для поверхностных зон I - го рода ( $i = 1, \dots, m_1$ ) можно найти по формулам (2.15), (2.16) и (2.17), которые для системы поверхностных и объемных зон принимают вид

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{погл}} - Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{\text{соб}}; \quad (2.27)$$

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{пад}} - Q_i^{\text{эф}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{\text{эф}}; \quad (2.28)$$

$$Q_i^{\text{рез}} = \frac{1}{R_i} \cdot (A_i \cdot Q_i^{\text{эф}} - Q_i^{\text{соб}}). \quad (2.29)$$

Расчетные формулы (2.27) и (2.28) для определения  $Q_i^{\text{рез}}$ , в принципе, эквивалентны. По формуле (2.29) результирующий тепловой поток рассчитывать проще. Однако надо иметь в виду, что при стремлении отражательной способности поверхностной зоны к нулю ( $R \rightarrow 0$ ) погрешность расчета возрастает.

Поток собственного излучения для поверхностных зон II - го рода ( $i = m_1 + 1, \dots, m$ ) находят из выражения (2.17):

$$Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot Q_i^{\text{эф}} - R_i Q_i^{\text{рез}}. \quad (2.30)$$

Зная поток собственного излучения  $i$  - й зоны, ее температуру рассчитывают по формуле (1.28), следующей из законов Стефана-Больцмана и Кирхгофа

$$Q_i^{\text{соб}} = \varepsilon_i \cdot \sigma_0 T_i^4 \cdot F_i, \quad (2.31)$$

откуда получаем

$$T_i = \sqrt[4]{\frac{Q_i^{\text{соб}}}{\varepsilon_i \cdot \sigma_0 \cdot F_i}}. \quad (2.32)$$

Результирующий тепловой поток для объемных зон I - го рода ( $i = m + 1, \dots, m + n_1$ ) рассчитывают по формуле (2.27):

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{погл}} - Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{ki} - Q_i^{\text{соб}}. \quad (2.33)$$

И, наконец, поток собственного излучения объемных зон II - го рода ( $i = m + n_1 + 1, \dots, l$ ) находят по формуле (2.14), которая учитывает, что объемные зоны не отражают падающий на них поток

$$Q_i^{\text{соб}} = Q_i^{\text{эф}}, \quad (2.34)$$

а температуру объемных зон II - го рода ( $i = m + n_1 + 1, \dots, l$ ) рассчитывают по формуле (2.32), в которой  $F_i$  в данном случае равна площади поверхности объемной зоны.

#### *Алгоритм решения системы зональных уравнений*

В полную систему зональных уравнений, которая состоит из подсистемы (2.26) определения эффективных тепловых потоков и уравнений для расчета неизвестных потоков результирующего излучения для зон I - го рода и неизвестных температур для зон II - го рода входят радиационные коэффициенты (поглощательные и отражательные способности зон, степени черноты, обобщенные угловые коэффициенты). Если коэффициенты системы *не зависят* от температуры, то полная система зональных уравнений является *линейной* относительно потоков эффективного излучения (подсистема (2.26)), потоков результирующего излучения для зон I - го рода и неизвестных температур для зон II - го рода. В этом случае после решения системы (2.26) находят потоки эффективного излучения  $Q_i^{\text{эф}}$  для всех поверхностных и объемных зон. Затем по явным фор-



мулам (2.27, 2.28, 2.29) рассчитывают потоки результирующего излучения для поверхностных зон I - го рода, по явной формуле (2.33) – результирующий тепловой поток для объемных зон I - го рода. По явным формулам (2.30) и (2.32) находят поток собственного излучения и температуру поверхностных зон II - го рода, а по явным формулам (2.34) и (2.32) – поток собственного излучения и температуру объемных зон II - го рода.

Однако в практике инженерных расчетов чаще всего приходится иметь дело с нелинейной системой зональных уравнений (2.26 ÷ 2.34). Нелинейность системы обусловлена зависимостью поглощательных способностей зон, степени черноты зон, обобщенных угловых коэффициентов от температуры. Для решения нелинейной системы зональных уравнений применяют различные модификации итерационных методов, рассмотрение которых выходит за рамки данного пособия. Заметим, что часто решение систем нелинейных уравнений можно получить, используя стандартное математическое обеспечение современных персональных компьютеров.

## **§ 2.5. Резольвентный зональный метод расчета радиационного теплообмена**

Классический зональный метод основан на использовании понятия эффективного излучения, под которым понимают сумму потоков собственного и отраженного излучений. Но объемные зоны не отражают падающий на них поток, и поэтому использование классического зонального метода удобно для расчета системы тел, разделенных диатермичной средой. При учете излучения и поглощения лучистой энергии в газовых объемах более удобным для математического описания радиационного теплообмена является резольвентный зональный метод.

Основой всех уравнений резольвентного зонального метода является выражение (2.15) непосредственно связывающее результирующие и собственные тепловые потоки.

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{погл}} - Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot Q_i^{\text{пад}} - Q_i^{\text{соб}}.$$

В этом случае эффективные потоки оказываются без надобности и поэтому в расчет вводят разрешающие угловые коэффициенты излучения, которые непосредственно связывают потоки падающего и собственного излучения.

По определению [4], разрешающий (разрешающий обобщенный) угловой коэффициент  $\Psi_{ki}$  учитывает вклад собственного излучения  $k$ -й зоны в падающий тепловой поток на  $i$ -ю зону с учетом всех переотражений потока собственного излучения  $k$ -й зоны от всех поверхностных зон и поглощений во всех объемных зонах. Поэтому необходимость применения эффективных тепловых потоков равных сумме собственного и отраженного излучения в этом случае отпадает.

Итак, с введением разрешающего углового коэффициента величину потока собственного излучения  $k$ -й зоны падающего на  $i$ -ю зону рассчитывают по формуле (2.11)

$$Q_{ki}^{\text{пад}} = Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki},$$

где  $Q_{ki}^{\text{пад}}$  – доля потока собственного излучения  $k$ -й зоны падающая на  $i$ -ю зону;  $Q_k^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения  $k$ -й зоны;  $\Psi_{ki}$  – разрешающий угловой коэффициент с  $k$ -й зоны на  $i$ -ю зону.

Суммарную величину потока падающего излучения на  $i$ -ю зону рассчитывают по формуле (2.12).

С учетом (2.11) формула (2.15) примет вид

$$Q_i^{\text{рез}} = Q_i^{\text{погл}} - Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{\text{соб}}. \quad (2.35)$$

Последнее выражение является основой математического моделирования радиационного теплообмена резольвентным зональным методом.

Свойства и методы определения разрешающих угловых коэффициентов излучения подробно изложены в § 2.3 настоящего пособия.

### *Система зональных уравнений*

Рассмотрим систему  $l$  тел, состоящую из  $m_1$  поверхностных зон I - го рода и  $n_1$  объемных зон I - го рода,  $m_2$  поверхностных зон II - го рода и  $n_2$  объемных зон II - го рода. Тогда суммарное количество зон I - го рода как поверхностных, так и объемных равно  $l_1 = m_1 + n_1$ , а общее число зон II - го рода составит величину  $l_2 = m_2 + n_2 = l - l_1$ .

Для определенности введем следующую нумерацию зон:

– зоны I - го рода и поверхностные и объемные имеют номера  $i = 1, \dots, l_1$ ;

– зоны II - го рода и поверхностные и объемные имеют номера  $i = l_1 + 1, \dots, l$ .

Система зональных уравнений в рамках резольвентного зонального метода основана на уравнении (2.35) и имеет вид

– для поверхностных и объемных зон I - го рода

$$Q_i^{\text{pez}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{cob}} \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{\text{cob}}, \quad i = 1, \dots, l_1; \quad (2.36)$$

– для поверхностных и объемных зон II - го рода

$$Q_i^{\text{cob}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{cob}} \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{\text{pez}}, \quad i = l_1 + 1, \dots, l. \quad (2.37)$$

Простота системы зональных уравнений, записанных в рамках резольвентного зонального метода, достигается использованием разрешающих коэффициентов, учитывающих радиационные свойства поверхностных зон и оптические свойства объемных зон.

*Алгоритм решения системы  
зональных уравнений*

Система зональных уравнений, записанная по правилам резольвентного зонального метода (2.36) – (2.37), имеет единообразный вид, так как для её записи использовано одно уравнение (2.35). Фактически система зональных уравнений (2.36) – (2.37) состоит из двух независимых подсистем:

- подсистема (2.36) для зон I - го рода;
- подсистема (2.37) для зон II - го рода.

При этом выражения (2.36) представляют собой явные формулы относительно неизвестных потоков результирующего излучения. Поэтому задача решения полной системы зональных уравнений (2.36) – (2.37) сводится к решению подсистемы (2.37).

Подсистема уравнений (2.37) может быть линейной (поглотательные способности и разрешающие угловые коэффициенты не зависят от температур зон II - го рода) и нелинейной (поглотательные способности и разрешающие угловые коэффициенты зависят от температур зон II - го рода).

Решение системы линейных уравнений выполняют при помощи стандартных процедур, входящих в математическое обеспечение современных компьютеров.

Для решения системы нелинейных уравнений применяют итерационные методы, которые можно разделить на две большие группы: градиентные и безградиентные мето-

ды. Среди градиентных методов наибольшую популярность приобрел итерационный метод Ньютона.

Для удобства применения итерационного метода Ньютона перепишем подсистему (2.37), заменяя в ней потоки собственного излучения их выражениям по формуле (2.31):

$$Q_k^{\text{соб}} = \varepsilon_k \cdot \sigma_0 T_k^4 \cdot F_k.$$

Получим

$$\varepsilon_i \sigma_0 T_i^4 F_i = A_i \cdot \sum_k \varepsilon_k \sigma_0 T_k^4 F_k \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{\text{пез}} \quad (2.38)$$

или

$$\sum_k \varepsilon_k \sigma_0 T_k^4 F_k \cdot (\Psi_{ki} A_i - \delta_{ki}) - Q_i^{\text{пез}} = 0, \quad (2.39)$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера;

$$\delta_{ki} = 1 \text{ при } k = i;$$

$$\delta_{ki} = 0 \text{ при } k \neq i.$$

В расчетах радиационного теплообмена часто используют так называемые коэффициенты радиационного теплообмена (радиационного обмена)  $a_{ki}$ , на которые в  $i$ -ом уравнении умножается температура  $k$ -й зоны в четвертой степени ( $T_k^4$ ). Из формулы (2.39) следует, что коэффициент радиационного обмена равен

$$a_{ki} = \varepsilon_k \sigma_0 F_k \cdot (\Psi_{ki} A_i - \delta_{ki}). \quad (2.40)$$

Применяя коэффициенты радиационного обмена  $a_{ki}$  систему зональных уравнений для зон  $\Pi$ -го рода (2.37) (или систему (2.39)) записывают в виде

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 - Q_i^{\text{пез}} = 0, \quad i = 1_1 + 1, \dots, 1. \quad (2.41)$$

При использовании коэффициентов радиационного обмена система зональных уравнений (2.36) для зон I - го рода принимает вид

$$Q_i^{\text{pez}} = \sum_k a_{ki} T_k^4, \quad i = 1, \dots, l_1. \quad (2.42)$$

Решая систему уравнений (2.41), находят температуры всех зон II - го рода  $T_i$ ,  $i = l_1 + 1, \dots, l$ . Затем по явным формулам (2.42) рассчитывают результирующие потоки зон I - го рода.

К достоинствам резольвентного зонального метода следует отнести универсальность формы записи зональных уравнений для поверхностных и объемных зон, наглядность записи зональных уравнений и компактность алгоритма расчета.

*Замечание.* Резольвентный зональный метод удобно применять не только для расчета радиационного теплообмена, но и для расчета сложного (лучисто-конвективного) теплообмена. В этом случае для расчета используют зоны III - го рода, для которых по определению является заданной функциональная зависимость между температурой и результирующим потоком зоны. При математическом описании конвективного теплопереноса, конвективной теплоотдачи, теплопередачи через стенки в зональных уравнениях появляются слагаемые, линейно зависящие от температуры. Система зональных уравнений при наличии зон III - го рода имеет вид

$$\sum_k a_{ki} T_k^4 + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^o = 0, \quad (2.43)$$

где  $h_{ki}$ ,  $h_i^o$  – коэффициенты конвективного обмена, которые рассчитывают в зависимости от конкретной постановки задачи.

При наличии в рассматриваемой системе тел зон III - го рода система зональных уравнений становится существенно нелинейной и для её решения необходимо использовать итерационные методы.

## **§ 2.6. Модификации зонального метода расчета радиационного теплообмена**

В настоящее время наряду с классическим и резольвентным зональными методами существует и ряд других модификаций зональных методов. В первую очередь отметим упрощенный зональный метод [8] и модифицированный зональный метод [9].

### *Упрощенные зональные методы*

Одно из направлений повышения эффективности зональных методов связано с принятием дополнительных упрощающих допущений. Так, при расчете температуры объемной зоны (см. рис. 2.1) излучение смежных с ней объемных зон можно заменить излучением условных абсолютно черных поверхностей – “граней” (показанных на рис. 2.1 пунктиром), температуры которых задаются таким образом, чтобы обеспечить действительные значения потоков результирующего излучения на границах рассматриваемой объемной зоны. Взаимное согласование результатов расчета РТО в отдельных объемных зонах производится с помощью специальной итерационной процедуры. Существенное упрощение расчета обусловлено исключением из рассмотрения обобщенных угловых коэффициентов излучения между зонами, разделенными более чем одной объемной зоной. Такой подход может быть реализован как в классической, так и в резольвентной (более эффективной) постановке [4].

Преимуществом упрощенного зонального метода перед его традиционными модификациями является не только упрощение расчетной схемы и необходимость определения обобщенных угловых коэффициентов излучения лишь в изотермических объемных зонах, но и существенное сокращение числа этих коэффициентов.

Для доказательства сказанного рассмотрим систему, образованную непрозрачной поверхностью, пространство внутри которой заполнено серой поглощающей и излучающей средой. Пренебрегая конвективным и кондуктивным теплообменом и применяя для расчета радиационного теплообмена (РТО) зональный метод, разобьем систему на  $m$  поверхностных и  $n$  объемных зон, в пределах которых все характеристики РТО можно приближенно считать постоянными.

Как известно [4], зональная методика расчета РТО базируется на понятии обобщенного углового коэффициента излучения  $\psi_{ki}$ , характеризующего долю потока эффективного излучения  $k$ -й зоны, достигающей  $i$ -й зоны с учетом поглощения части излучения средой. При этом обобщенный угловой коэффициент излучения  $\psi_{ki}$  связан с угловым коэффициентом излучения в диатермичной среде  $\varphi_{ki}$  соотношением  $\psi_{ki} = \varphi_{ki} \cdot D_{ki}$ , где  $D_{ki}$  – пропускательная способность среды для части эффективного излучения  $k$ -ой зоны, достигающей  $i$ -й зоны.

Нахождение матрицы  $(m+n) \times (m+n)$  обобщенных угловых коэффициентов излучения представляет собой обычно наиболее сложный и трудоемкий этап решения задачи радиационного теплообмена. Это обусловлено, главным образом, необходимостью определения пропускательной способности среды  $D_{ki}$  для зон, разделенных *несколькими* объемными зонами. Часто применяемая на практике формула [4]  $D_{ki} = \prod D_j$ , где  $j$  – номера объемных зон, разделяющих  $k$ -ю и  $i$ -ю зоны, в общем случае является



весьма приближенной, так как, строго говоря, величина  $D_j$  (равная в сером приближении  $(1 - \varepsilon_j)$ , где  $\varepsilon_j$  – степень черноты) представляет собой пропускательную способность  $j$ -й зоны для излучения ограничивающей ее поверхности (а не для части излучения  $k$ -й зоны). Предлагаемый подход позволяет исключить из рассмотрения обобщенные угловые коэффициенты излучения между зонами, разделенными более чем одной объемной зоной, и тем самым существенно упростить расчет РТО.

Примем следующие дополнительные допущения: эффективное излучение поверхностных зон является диффузным; температуры поверхностных зон имеют известные значения; в среде отсутствуют источники и стоки тепла. Указанные допущения, кроме первого, не являются принципиальными и используются только для упрощения изложения.

Рассмотрим некоторую  $i$ -ю объемную зону. Номера смежных с ней поверхностных зон обозначим через  $j_1, j_2, \dots$ , а объемных – через  $k_1, k_2, \dots$ . Введем также следующие обозначения (рис.2.1):  $F_j$  ( $j = j_1, j_2, \dots$ ) – площади поверхностных зон;  $F_{ki}$  ( $k = k_1, k_2, \dots$ ) – площади условных поверхностей (“граней”), отделяющих  $i$ -ю зону от смежных с ней объемных зон;  $q_j$  ( $j = j_1, j_2, \dots$ ) – плотность потока результирующего излучения, проходящего через  $j$ -ю поверхностную зону;  $q_{ki}$  ( $k = k_1, k_2, \dots$ ) – плотность потока результирующего излучения, проходящего через  $k$ -ю грань.

Введем в рассмотрение воображаемые абсолютно черные поверхности (на рис. 2.1 показаны пунктиром), прилегающие к  $i$ -й зоне со стороны смежных с ней объемных зон и имеющие температуры  $T_{ki}$  ( $k = k_1, k_2, \dots$ ). Образованную таким образом замкнутую систему, состоящую из  $i$ -го *изотермического* объема, поверхностных зон  $j_1, j_2, \dots$  и абсолютно черных поверхностей  $F_{ki}$  ( $k=k_1, k_2, \dots$ ) будем называть  $i$ -й подсистемой. Расчет РТО в такой подсистеме

ме не представляет затруднений и позволяет выразить плотности потоков результирующего излучения на ее границах  $q_j$  ( $j = j_1, j_2, \dots$ ),  $q_{ki}$  ( $k = k_1, k_2, \dots$ ) и температуру среды  $T_i$  в виде функций граничных температур  $T_j$  ( $j = j_1, j_2, \dots$ ),  $T_{ki}$  ( $k = k_1, k_2, \dots$ ):

$$q_j = q_j(T_{j1}, T_{j2}, \dots, T_{ki}, T_{k2i}, \dots), j = j_1, j_2, \dots; \quad (2.44)$$

$$q_{ki} = q_{ki}(T_{j1}, T_{j2}, \dots, T_{ki}, T_{k2i}, \dots); \quad (2.45)$$

$$T_i = T_i(T_{j1}, T_{j2}, \dots, T_{ki}, T_{k2i}, \dots). \quad (2.46)$$

Используя соотношения (2.44) и (2.45) приписывают абсолютно черным поверхностям  $F_{ki}$  такие температуры  $T_{ki}$ , чтобы плотности потоков результирующего излучения  $q_j$  и  $q_{ki}$  сохранили свои действительные значения. Температуру  $T_{ki}$  называют эффективной температурой  $k$ -ой грани для  $i$ -ой объемной зоны.

Проведя подобные рассуждения для всех объемных зон, записывают  $n$  соотношений вида (2.44) - (2.46) и для каждой объемной зоны определяют эффективные температуры ее граней. Например, для  $k$ -й объемной зоны, смежной с рассмотренной выше  $i$ -й объемной зоной, эффективная температура  $i$ -й грани будет равна  $T_{ik}$ .

Для взаимного согласования результатов расчета РТО в отдельных подсистемах необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары смежных объемных зон выполнялись следующие соотношения (рис. 2.2)

$$q_{ki} = -q_{ik} = \sigma_0 \cdot (T_{ki}^4 - T_{ik}^4), \quad (2.47)$$

где  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Соотношения (2.47) связывают подсистемы уравнений вида (2.44) – (2.46) в единую систему уравнений, решение которой получают методом итераций.

Отметим, что преимуществом предлагаемого подхода перед традиционными модификациями зонального метода является не только упрощение расчетной схемы и необходимость определения обобщенных угловых коэффициентов излучения лишь в изотермических объемных зонах, но и существенное сокращение числа этих коэффициентов с  $(m+n) \times (m+n)$  до  $\sum l_i^2$ , где  $l_i$  – количество зон в  $i$ -й подсистеме.

Для иллюстрации проведем расчет радиационного теплообмена в плоском слое серой среды, заключенной между двумя непрозрачными поверхностями  $x = 0$  и  $x = \delta$ , поддерживаемыми при постоянных температурах  $T_a$  и  $T_b$  ( $T_a < T_b$ ) [10]. Для упрощения изложения будем считать граничные поверхности абсолютно черными, а коэффициент поглощения среды  $k$  – независимым от температуры.

Разобьем интервал  $0 \leq x \leq \delta$  на  $N$  элементарных интервалов (слоев) толщиной  $\Delta x = \delta / N$ . Применяя зональную методику, рассматриваем граничные поверхности как две поверхностные зоны, имеющие заданные по условию температуры  $T_0 = T_a$  и  $T_{N+1} = T_b$ , а элементарные слои – как  $N$  ( $i=1, \dots, N$ ) объемных изотермических зон (адиабатных при отсутствии источников и стоков тепла).

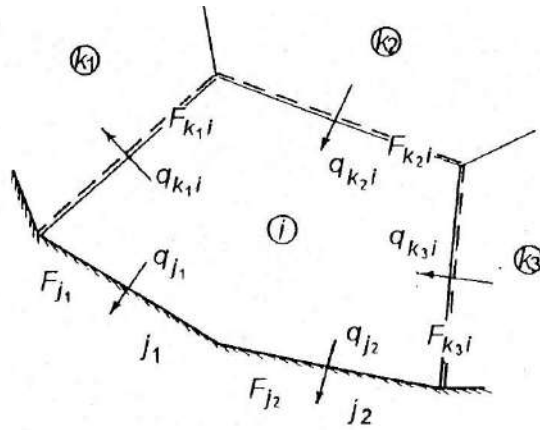


Рис. 2.1. К расчету РТО в  $i$ -й объемной зоне:

$k_1, k_2, k_3$  – номера смежных объемных зон;  $j_1, j_2$  – номера смежных поверхностных зон;  $F_j$  – площади поверхностных зон;  $F_{ki}$  – площади граней, отделяющих  $i$ -ю зону от смежных с ней объемных зон;  $q_j$  – плотность потока результирующего излучения, проходящего через  $j$ -ю поверхностную зону;  $q_{ki}$  – плотность потока результирующего излучения, проходящего через  $k$ -ю грань

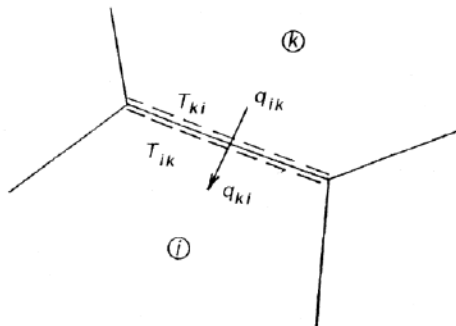


Рис. 2.2. К выводу условия согласования эффективных температур в смежных объемных зонах

Выделим  $i$ -ю подсистему, образованную  $i$ -м элементарным изотермическим слоем и прилегающими к нему абсолютно черными поверхностями, имеющими эффективные температуры  $T_{i-1,i}$  и  $T_{i+1,i}$  (при абсолютно черных поверхностных зонах  $T_{0,1} = T_0$  и  $T_{N+1,N} = T_{N+1}$ ). Расчет РТО в этой подсистеме приводит к следующим формулам, конкретизирующим общие соотношения (2.47) – (2.49):

$$q_{i+1,i} = -q_{i-1,i} = (1 - \varepsilon_{\Delta x}) \cdot \sigma_0 \cdot (T_{i+1,i}^4 - T_{i-1,i}^4); \quad (2.48)$$

$$T_i^4 = (T_{i+1,i}^4 - T_{i-1,i}^4) / 2, \quad (2.49)$$

где  $\varepsilon_{\Delta x} = 1 - \exp(-2 \cdot k \cdot \Delta x)$  – степень черноты плоского слоя толщиной  $\Delta x$ ;  $k$  – коэффициент ослабления излучения [4].

Записав формулы (2.48) для всех элементарных слоев (при  $i = 1, \dots, N$ ) и присоединив к ним условия согласования (2.47), которые в этом случае примут вид

$$q_{i+1,i} = -q_{i-1,i} = \sigma_0 \cdot (T_{i+1,i}^4 - T_{i-1,i}^4) \equiv q, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2.50)$$

получим полную систему из  $(2 \cdot N - 1)$  уравнений относительно эффективных температур  $T_{i-1,i}$  ( $i = 2, \dots, N$ ),  $T_{i+1,i}$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ) и плотности потока результирующего излучения  $q$ . Решение этой системы получают с помощью итерационной процедуры, включающей в себя следующие этапы.

1. Задание исходного приближения для эффективных температур  $T_{i+1,i}$ , например, по формуле

$$T_{i+1,i} = (T_b^4 + T_a^4) / 2, \quad i = 1, N-1. \quad (2.51)$$

2. При  $i = 1, \dots, N-1$ : расчет плотности потока результирующего излучения  $q_{i+1,i}$  по формуле (2.48) и нахождение эффективной температуры  $T_{i,i+1}$  из условия (2.50).

3. При  $i = N, \dots, 2$ : расчет плотности потока результирующего излучения  $q_{i-1,i}$  по формуле (2.48) и нахождение

уточненного значения эффективной температуры  $T_{i,i-1}^*$  из условия (2.50).

4. Определение максимального отклонения последующего приближения эффективных температур от предыдущего  $\Delta = \max |T_{i+1,i}^* - T_{i+1,i}|, i = 1, \dots, N-1$ .

5. Если  $\Delta$  превышает максимально допустимую погрешность расчета температур, присваивание  $T_{i+1,i} = T_{i+1,i}^*$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) и возврат к п.2.

После окончания итераций по формуле (2.49) определяют зональные значения температур элементарных слоев  $T_i, i = 1, \dots, N$ .

При представлении результатов решения рассмотренной задачи удобно использовать безразмерные величины: оптическую толщину слоя  $\tau_0 = k \cdot \delta$ , координату  $X = x/\delta$ , температуру  $\theta = (T^4 - T_a^4)/(T_b^4 - T_a^4)$  и плотность потока результирующего излучения  $\tilde{Q} = q/\sigma_0 \cdot (T_b^4 - T_a^4)$ .

Таблица 2.1. Безразмерный результирующий тепловой поток  $\tilde{Q}$  в зависимости от оптической толщины слоя  $\tau_0$

$\tau_0$	Рассчитанное значение $\tilde{Q}$	Точное значение $\tilde{Q}$ [10]	Относительная погрешность, %
0,1	0,9091	0,9157	0,72
0,2	0,8333	0,9491	1,86
0,3	0,7693	0,7934	3,04
0,4	0,7144	0,7458	4,21
0,5	0,6669	0,7040	5,27
0,6	0,6253	0,6672	6,28
0,8	0,5561	0,6046	8,02
1,0	0,5008	0,5532	9,47

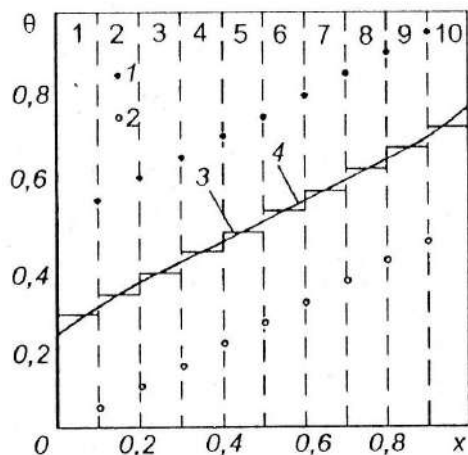


Рис. 2.3. Результаты расчета РТО в плоском слое при  $\tau_0 = 1$  и  $N = 10$ . Цифры в верхней части рисунка – номера элементарных слоев:

- 1 – эффективные температуры  $T_{i+1,i}$ , ( $i = 1, \dots, N - 1$ );
- 2 – эффективные температуры  $T_{i-1,i}$ , ( $i = 2, \dots, N$ );
- 3 – зональные температуры  $T_i$ , ( $i = 1, \dots, N$ );
- 4 – точное решение [10]

На рис. 2.3 показаны зависимости безразмерных значений зональных и эффективных температур от координаты для одного из вариантов расчета. В табл. 2.1 приведены значения безразмерной плотности потока результирующего излучения при различных оптических толщинах слоя.

Адекватность упрощенного зонального метода проверена путем сопоставления результатов расчета по упрощенному зональному методу и классическому зональному методу. Получено полное совпадение зональных температур и результирующих тепловых потоков.

В табл. 2.1 указаны также точные значения безразмерной плотности потока результирующего излучения [10] и относительные погрешности расчета этой величины зо-

нальным методом, обусловленные использованием допущения об изотермичности объемных зон.

### *Модифицированный резольвентный зональный метод*

В разделе 2.3 «Обобщенные и разрешающие угловые коэффициенты излучения» было показано, что в основе различных вариантов зонального метода расчета радиационного теплообмена лежат соотношения вида:

– для классического зонального метода (2.7)

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \Psi_{ki},$$

где  $Q_i^{\text{пад}}$  – падающий тепловой поток на  $i$  - ю зону;  $Q_k^{\text{эф}}$  – эффективный тепловой поток, уходящий с  $k$  - й зоны;  $\Psi_{ki}$  – обобщенный угловой коэффициент излучения с  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону;

– для резольвентного зонального метода (2.12)

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki}, \quad i = 1, \dots, l,$$

где  $Q_i^{\text{пад}}$  – падающий тепловой поток на  $i$  - ю зону;  $Q_k^{\text{соб}}$  – собственный тепловой поток  $k$  - й зоны;  $\Psi_{ki}$  – разрешающий угловой коэффициент излучения с  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону.

Следуя [9], выражения (2.7) и (2.12) можно записать в общем виде как

$$Q_i^{\text{пад}} = \sum_k Q_k^{\text{баз}} \cdot Z_{ki}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.52)$$

где  $Q_k^{\text{баз}}$  – базисный тепловой поток;  $Z_{ki}$  – матрица коэффициентов.

Таким образом, в случае классического зонального метода в качестве базисного теплового потока выступает по-



ток эффективного излучения  $Q_k^{\text{баз}} \equiv Q_k^{\text{эф}}$ , а при использовании резольвентного зонального метода – поток собственного излучения  $Q_k^{\text{баз}} \equiv Q_k^{\text{соб}}$ . В классическом зональном методе в качестве матрицы коэффициентов используют матрицу эффективных угловых коэффициентов излучения  $Z_{ki} \equiv \Psi_{ki}$ , а в резольвентном зональном методе – матрицу разрешающих угловых коэффициентов  $Z_{ki} \equiv \Psi_{ki}$ .

Как было отмечено (см. раздел 2.5), резольвентный зональный метод удобно применять при заданной температуре зон (прямая постановка задачи). В этом случае все зоны, образующие рассматриваемую систему, являются зонами I - го рода и величины всех базисных потоков  $Q_k^{\text{баз}} \equiv Q_k^{\text{соб}}$  ( $k = 1, \dots, l$ ) заданы по условию. Тогда расчет неизвестных результирующих радиационного теплообмена сводится к вычислениям по явным формулам (2.36)

$$Q_i^{\text{рез}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{\text{соб}}, \quad i = 1, \dots, l,$$

где  $A_i$  – поглощательная способность  $i$  - й зоны;  $\Psi_{ki}$  – разрешающий угловой коэффициент с  $k$  - й зоны на  $i$  - ю зону.

При смешанной постановке задачи (при наличии в системе зон I - го и II - го рода) расчет усложняется, так как температуры зон II - го рода  $T_i$  ( $i = l_1 + 1, \dots, l$ ) по условию не заданы. Для их определения необходимо решить систему из  $l_2$  зональных уравнений (2.37):

$$Q_i^{\text{соб}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{соб}} \cdot \Psi_{ki} - Q_i^{\text{рез}}, \quad i = l_1 + 1, \dots, l.$$

Для упрощения расчета радиационного теплообмена при смешанной постановке задачи может быть использована модификация зонального метода [9], в рамках которой при записи соотношения (2.12) в качестве базисных потоков используют совокупность потоков излучения, задан-

ных по условию задачи – потоков собственного излучения для зон I - го рода и потоков результирующего излучения (взятых с обратным знаком) для зон II - го рода:

$$Q_k = \begin{cases} Q_k^{\text{нiá}}, k = 1, \dots, l_1 - \text{äëÿ çí I-âî ðíäà}, \\ -Q_k^{\text{ðáç}}, k = l_1 + 1, \dots, l - \text{äëÿ çí II-âî ðíäà}. \end{cases} \quad (2.53)$$

В качестве матрицы коэффициентов в модифицированном зональном методе используют модифицированные разрешающие коэффициенты, которые находят решением системы уравнений

$$Z_{ki} = \varphi_{ki} + \sum_{j=1}^m \varphi_{kj} \cdot P_j \cdot Z_{ji}. \quad (2.54)$$

Коэффициенты  $P_j$ , входящие в систему (2.60), равны

$$P_j = \begin{cases} R_j - \text{äëÿ çí I-âî ðíäà}, \\ 1 - \text{äëÿ ñáäðîíîðò íó çí II-âî ðíäà}, \\ A_j - \text{äëÿ íáíáíó çí II-âî ðíäà}. \end{cases} \quad (2.55)$$

В рамках модифицированного зонального метода решение задачи радиационного теплообмена можно представить в явном виде:

– для поверхностных и объемных зон I - го рода

$$Q_i^{\text{pez}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{cob}} \cdot Z_{ki} - Q_i^{\text{cob}}, \quad i = 1, \dots, l_1; \quad (2.56)$$

– для поверхностных и объемных зон II - го рода

$$Q_i^{\text{cob}} = A_i \cdot \sum_k Q_k^{\text{cob}} \cdot Z_{ki} - Q_i^{\text{pez}}, \quad i = l_1 + 1, \dots, l. \quad (2.57)$$

Основное преимущество модифицированного зонального метода заключается в упрощении алгоритма рас-

чета радиационного теплообмена при наличии зон I - го и II - го рода (смешанная постановка задачи).

Для использования модифицированного зонального метода при наличии зон III -го рода необходимо выразить потоки собственного излучения через зональные температуры и ввести модифицированные коэффициенты радиационного теплообмена

$$a_{ki}^{\text{мод}} = \varepsilon_k \sigma_0 F_k \cdot (Z_{ki} A_i - \delta_{ki}) . \quad (2.58)$$

С учетом (2.58) система зональных уравнений (2.43) примет вид

$$\sum_k a_{ki}^{\text{мод}} T_k^4 + \sum_k h_{ki} T_k + h_i^o = 0 , \quad (2.59)$$

где  $h_{ki}$ ,  $h_i^o$  – коэффициенты конвективного обмена, которые рассчитывают в зависимости от конкретной постановки задачи.

После решения системы нелинейных зональных уравнений (2.59) методом Ньютона находят потоки результирующего излучения для зон I - го рода и потоки собственного излучения для зон II - го рода.

При решении задач сложного теплообмена преимущество резольвентных зональных методов перед классическим заключается в их более высокой эффективности, обусловленной существенным уменьшением размерности системы нелинейных зональных уравнений и возможностью ее решения с помощью итерационного метода Ньютона.

## РАЗДЕЛ 3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА

### § 3.1. Постановка задачи расчета радиационного теплообмена в системах из трех тел

Все теоретические положения математического аппарата зональных методов расчета изложены для систем твердых и газовых тел, состоящих из произвольного числа зон. Для понимания алгоритма расчета радиационного теплообмена зональными методами (классическим и резольвентным) рассмотрим определение температур и тепловых потоков в двух простейших системах тел, состоящих из двух твердых серых тел, разделенных газом. При помощи таких систем в инженерных расчетах часто моделируют теплообмен в сложных объектах.

Первая система тел (рис. 3.1) состоит из двух твердых серых тел, разделенных лучепрозрачной средой ( $D_3 = 1, A_3 = 0$ ). Тело 1 – приемник теплового потока, а тело 2 – излучатель. Вторая система тел (рис. 3.2) отличается от первой тем, что тело 3 является излучающим и поглощающим газом ( $A_3 \neq 0$ ).

Задачи расчета теплообмена в системах, состоящих из небольшого числа тел (до пяти тел) часто называют *модельными задачами*. При решении модельных задач, во-первых, легче понять суть рассматриваемого метода расчета, а во-вторых, результаты решения модельных задач часто имеют и практический смысл, т.к. отражают основные закономерности теплообмена в сложной системе тел.

Для системы тел №1, состоящих из двух твердых серых тел, разделенных диатермичной средой, будем считать тело 1 зоной I - го рода, а тело 2 – зоной II - го рода.

Для системы тел №2, состоящих из двух твердых серых тел, разделенных ослабляющим газом, рассмотрим два варианта задания типа зон:

– вариант А: тела 1 и 3 являются зонами I - го рода, а тело 2 – зоной II - го рода;

– вариант Б: тело 1 – зона I - го рода, а тела 2 и 3 – зоны II - го рода.

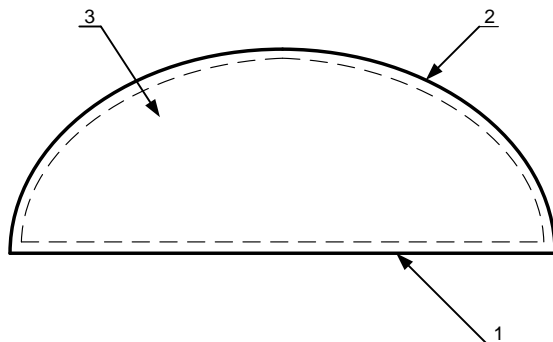


Рис.3.1. Система тел №1, состоящая из двух серых тел, разделенных лучепрозрачной средой:  
 1 – невогнутое тело (поверхностная зона);  
 2 – вогнутое тело (поверхностная зона);  
 3 – диатермичный газовый объем (объемная зона)

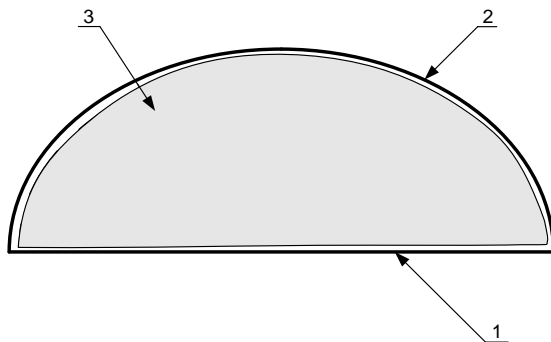


Рис. 3.2. Система тел №2, состоящая из двух серых тел и излучающего и поглощающего газа между ними:  
 1 – невогнутое тело (поверхностная зона);  
 2 – вогнутое тело (поверхностная зона);  
 3 – лученепрозрачный газовый объем (объемная зона)

Исходные данные для расчета радиационного теплообмена приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Исходные данные для расчета РТО в системах, изображенных на рис.3.1 и рис. 3.2

Параметр	Система, состоящая из двух серых тел (система №1)	Система, состоящая из двух серых тел и газа между ними (система №2)
Площадь поверхности первого тела ( $F_1$ ), м <sup>2</sup>	10	10
Площадь поверхности второго тела ( $F_2$ ), м <sup>2</sup>	28	28
Площадь поверхности третьего тела (газового объема) ( $F_3$ ), м <sup>2</sup>	–	$F_3 = F_1 + F_2 = 10 + 28 = 38$
Температура первого тела ( $T_1$ ), К	1073	1073
Температура третьего тела ( $T_2$ ), К	1573	1573
Поток результирующего излучения тела 2 ( $Q^p_2$ ), Вт	28000	28000
Вариант 1. $\varepsilon_1 = \text{var}$ , $\varepsilon_2 = \text{const}$ , $\varepsilon_3 = \text{const}$		
Степень черноты первого тела ( $\varepsilon_1$ )	0,1÷1,0	0,1÷1,0
Степень черноты второго тела ( $\varepsilon_2$ )	0,75	0,75
Степень черноты третьего тела ( $\varepsilon_3$ )	–	0,1

Параметр	Система, состоящая из двух серых тел (система №1)	Система, состоящая из двух серых тел и газа между ними (система №2)
Вариант 2. $\varepsilon_2 = \text{var}, \varepsilon_1 = \text{const}, \varepsilon_3 = \text{const}$		
Степень черноты первого тела ( $\varepsilon_1$ )	0,8	0,8
Степень черноты второго тела ( $\varepsilon_2$ )	0,1÷1,0	0,1÷1,0
Степень черноты третьего тела ( $\varepsilon_3$ )	0,1	0,1
Вариант 3. $\varepsilon_3 = \text{var}, \varepsilon_1 = \text{const}, \varepsilon_2 = \text{const}$		
Степень черноты первого тела ( $\varepsilon_1$ )	0,8	0,8
Степень черноты второго тела ( $\varepsilon_2$ )	0,75	0,75
Степень черноты третьего тела ( $\varepsilon_3$ )	–	0,2÷1,0

### § 3.2. Решение модельной задачи классическим зональным методом

#### *Система тел №1*

Запишем систему зональных уравнений классическим зональным методом (см. §2.4) для двух серых тел, разделенных диатермичной средой при условии, что задана температура первой зоны  $T_1$  (зона I - го рода), а для второй зоны задан результирующий тепловой поток (зона II - го рода).

#### *Определение обобщенных угловых коэффициентов*

На первом этапе решения задачи необходимо определить потоки эффективного излучения каждой поверхностью



ной объемной зоны. Используя первое и второе уравнения системы (2.26) с учетом равенства обобщенных угловых и угловых коэффициентов для тел, разделенных лучепрозрачной средой ( $\psi_{ki} = \phi_{ki}$ ), получим

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{эф}} &= R_1 \cdot \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{k1} + Q_1^{\text{соб}} = \\ &= (1 - \varepsilon_1) \cdot (Q_1^{\text{эф}} \cdot \phi_{11} + Q_2^{\text{эф}} \cdot \phi_{21}) + Q_1^{\text{соб}}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} Q_2^{\text{эф}} &= \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \psi_{k2} - Q_2^{\text{рез}} = \\ &= (Q_1^{\text{эф}} \cdot \phi_{12} + Q_2^{\text{эф}} \cdot \phi_{22}) - Q_2^{\text{рез}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $Q_1^{\text{эф}}$  – поток эффективного излучения тела 1;  $Q_2^{\text{эф}}$  – поток эффективного излучения тела 2;  $Q_1^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения тела 1;  $Q_2^{\text{рез}}$  – поток результирующего излучения тела 2;  $R_1 = 1 - A_1 = 1 - \varepsilon_1$  – отражательная способность первого тела;  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{21}$ ,  $\phi_{22}$  – угловые коэффициенты излучения в системе двух тел, разделенных диатермичной средой.

Угловые коэффициенты в системе 1 рассчитывают по формулам (1.45):

$$\phi_{1-1} = 0; \quad \phi_{1-2} = 1; \quad \phi_{2-2} = 1 - \frac{F_1}{F_2}; \quad \phi_{2-1} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Решая систему уравнений (3.1) – (3.2), находят потоки эффективного излучения для тел 1 и 2.

### *Определение параметров радиационного теплообмена*

Зная потоки эффективного излучения первого и второго тела, по формуле (2.28) рассчитывают результирующий тепловой для тела 1 (зона I - го рода) и поток собственного излучения (зона II - го рода) по формуле (2.30)

$$\begin{aligned}
 Q_1^{\text{д\acute{a}c}} &= Q_1^{\text{i\ddot{a}a}} - Q_1^{\text{y}\acute{\delta}} = \sum_k Q_k^{\text{y}\acute{\delta}} \cdot \psi_{k1} - Q_1^{\text{y}\acute{\delta}} = \\
 &= Q_1^{\text{y}\acute{\delta}} \cdot \varphi_{11} + Q_2^{\text{y}\acute{\delta}} \cdot \varphi_{21} - Q_1^{\text{y}\acute{\delta}};
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2^{\text{coб}} &= A_2 \cdot Q_2^{\text{эф}} - R_2 Q_2^{\text{pez}} = \\
 &= \varepsilon_2 \cdot Q_2^{\text{эф}} - (1 - \varepsilon_2) \cdot Q_2^{\text{pez}},
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

где  $Q_1^{\text{pez}}$  – поток результирующего излучения тела 1;  $Q_2^{\text{coб}}$  – поток собственного излучения тела 2;  $A_2 = \varepsilon_2$  – поглощательная способность и степень черноты второго тела;  $R_2 = 1 - A_2 = 1 - \varepsilon_2$  – отражательная способность второго тела.

*Замечание.* Поток собственного излучения второго тела можно найти по определению эффективного теплового потока (1.7), из которого следует

$$\begin{aligned}
 Q_2^{\text{coб}} &= Q_2^{\text{эф}} - Q_2^{\text{отр}} = Q_2^{\text{эф}} - R_2 \cdot Q_2^{\text{пад}} = \\
 &= Q_2^{\text{эф}} - R_2 \cdot \sum_k Q_k^{\text{эф}} \cdot \varphi_{k2} = \\
 &= Q_2^{\text{эф}} - (1 - \varepsilon_2) \cdot (Q_1^{\text{эф}} \cdot \varphi_{12} + Q_2^{\text{эф}} \cdot \varphi_{22}).
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Зная поток собственного излучения второй зоны, ее температуру рассчитывают по формуле (2.32)

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{Q_2^{\text{coб}}}{\varepsilon_2 \cdot \sigma_0 \cdot F_2}}.
 \tag{3.6}$$

### *Система тел №2*

Для решения задачи в системе, изображенной на рис.3.2, на первом этапе расчета определяют обобщенные угловые коэффициенты  $\psi_{ki}$ , затем находят эффективные

тепловые потоки для поверхностных и объемных зон  $Q_i^{\text{эф}}$  и на третьем этапе расчета по известным потокам эффективного излучения рассчитывают для зон I - го рода потоки результирующего излучения  $Q_i^{\text{рез}}$ , а для зон II - го рода – потоки собственного излучения  $Q_i^{\text{соб}}$ .

### *Определение обобщенных угловых коэффициентов*

В простейших системах обобщенные угловые коэффициенты излучения находят, используя их свойства: свойство взаимности, свойство замыкаемости (замкнутости) и свойство невогнутости.

Свойство взаимности обобщенных угловых коэффициентов излучения совпадает со свойством взаимности угловых коэффициентов (1.40)

$$\psi_{ik} \cdot F_i = \psi_{ki} \cdot F_k. \quad (3.7)$$

Свойство замыкаемости обобщенных угловых коэффициентов для системы, состоящей из трех тел, запишем, следуя формуле (2.3)

$$\sum_{i=1}^2 \psi_{ki} + \sum_{i=3}^3 \psi_{ki} A_i = 1,$$

где  $\sum_{i=3}^3 \psi_{ki} A_i = A_{\Gamma(k)}$  – поглощательная способность газа для эффективного излучения  $k$  - й зоны. Поэтому можно записать (2.4)

$$\sum_{i=1}^2 \psi_{ki} = 1 - A_{\Gamma(k)} = D_{\Gamma(k)}.$$

Свойство невогнутости для обобщенных угловых коэффициентов имеет вид

$$\psi_{ii} = 0. \quad (3.8)$$

Применяя свойство взаимности (3.7) получаем

$$\begin{cases} \psi_{12} \cdot F_1 = \psi_{21} \cdot F_2, \\ \psi_{13} \cdot F_1 = \psi_{31} \cdot F_3, \\ \psi_{23} \cdot F_2 = \psi_{32} \cdot F_3. \end{cases} \quad (3.9)$$

Применяя свойство замыкаемости (2.3) и (2.4) имеем

$$\begin{cases} \psi_{11} + \psi_{12} + \psi_{13} \cdot \varepsilon_3 = 1, \\ \psi_{21} + \psi_{22} + \psi_{23} \cdot \varepsilon_3 = 1, \\ \psi_{31} + \psi_{32} + \psi_{33} \cdot \varepsilon_3 = 1, \\ \psi_{11} + \psi_{12} = 1 - \varepsilon_3, \\ \psi_{21} + \psi_{22} = 1 - \varepsilon_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $\varepsilon_3 = A_3$  – степень черноты (поглощательная способность) объемной зоны (тело 3).

В системе трех тел только тело 1 является невогнутым, поэтому для него по формуле (3.8) записываем

$$\psi_{11} = 0. \quad (3.11)$$

Решая систему уравнений (3.9) – (3.11), находим матрицу из 9 обобщенных разрешающих угловых коэффициентов.

### *Определение потоков эффективного излучения*

#### *Вариант А*

По варианту А тела 1 и 3 являются зонами I - го рода, а тело 2 – зоной II - го рода. Следуя первому, второму и третьему уравнениям системы (2.26) получаем

$$\begin{cases} Q_1^{\dot{y}\dot{o}} = (1 - \varepsilon_1) \cdot (Q_1^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{21} + Q_3^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{31}) + Q_1^{\dot{n}\dot{i}\dot{a}}, \\ Q_2^{\dot{y}\dot{o}} = Q_1^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{12} + Q_2^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{22} + Q_3^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{32} - Q_2^{\dot{\delta}\dot{a}\dot{c}}, \\ Q_3^{\dot{y}\dot{o}} = Q_3^{\dot{n}\dot{i}\dot{a}}, \end{cases} \quad (3.12)$$

где  $Q_1^{\text{эф}}$  – поток эффективного излучения тела 1;  $Q_2^{\text{эф}}$  – поток эффективного излучения тела 2;  $Q_3^{\text{эф}}$  – поток эффективного излучения тела 3;  $Q_1^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения тела 1;  $Q_3^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения тела 3;  $Q_2^{\text{рез}}$  – поток результирующего излучения тела 2;  $R_1 = 1 - A_1 = 1 - \varepsilon_1$  – отражательная способность первого тела;  $\Psi_{11}, \Psi_{21}, \Psi_{31}, \Psi_{12}, \Psi_{22}, \Psi_{32}$  – обобщенные угловые коэффициенты излучения в системе двух тел, разделенных поглощающей и излучающей средой.

### *Вариант Б*

По варианту Б тело 1 является зоной I - го рода, а тела 2 и 3 – зонами II - го рода. Следуя первому, второму и четвертому уравнениям системы (2.26) получаем

$$\begin{cases} Q_1^{\dot{y}\dot{o}} = (1 - \varepsilon_1) \cdot (Q_1^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{21} + Q_3^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{31}) + Q_1^{\dot{n}\dot{i}\dot{a}}, \\ Q_2^{\dot{y}\dot{o}} = Q_1^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{12} + Q_2^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{22} + Q_3^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{32} - Q_2^{\dot{\delta}\dot{a}\dot{c}}, \\ Q_3^{\dot{y}\dot{o}} = \varepsilon_3 \cdot (Q_1^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{13} + Q_2^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{23} + Q_3^{\dot{y}\dot{o}} \cdot \Psi_{33}) - Q_3^{\dot{\delta}\dot{a}\dot{c}}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Из решения системы уравнений (3.12) по варианту А или системы уравнений (3.13) по варианту Б находят эффективные тепловые потоки двух поверхностных и одной объемной зоны.

## Определение параметров радиационного теплообмена

### Вариант А

По варианту А тела 1 и 3 являются зонами I - го рода, а тело 2 – зоной II - го рода. Поэтому зональные уравнения для определения результирующих тепловых потоков для тела 1 и тела 3 и поток собственного излучения для тела 2 записываем, следуя формулам (2.28), (2.30) и (2.33)

$$\begin{cases} Q_1^{\delta\acute{a}\zeta} = Q_1^{\acute{y}\delta} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\acute{y}\delta} \cdot \Psi_{21} + Q_3^{\acute{y}\delta} \cdot \Psi_{31} - Q_1^{\acute{y}\delta}, \\ Q_2^{\grave{n}\acute{a}\acute{a}} = \varepsilon_2 \cdot Q_2^{\acute{y}\delta} - (1 - \varepsilon_2) \cdot Q_2^{\delta\acute{a}\zeta}, \\ Q_3^{\delta\acute{a}\zeta} = \varepsilon_3 \cdot (Q_1^{\acute{y}\delta} \cdot \Psi_{13} + Q_2^{\acute{y}\delta} \cdot \Psi_{23} + Q_3^{\acute{y}\delta} \cdot \Psi_{33}) - Q_3^{\grave{n}\acute{a}\acute{a}}, \end{cases} \quad (3.14)$$

где  $Q_1^{\text{рез}}$  – поток результирующего излучения тела 1;  $Q_2^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения тела 2;  $Q_3^{\text{рез}}$  – поток результирующего излучения тела 3;  $A_2 = \varepsilon_2$  – поглощательная способность и степень черноты второго тела;  $R_2 = 1 - A_2 = 1 - \varepsilon_2$  – отражательная способность второго тела;  $A_3 = \varepsilon_3$  – поглощательная способность и степень черноты третьего тела;  $Q_3^{\text{соб}}$  – поток собственного излучения третьего тела.

Зная поток собственного излучения второй зоны, ее температуру рассчитывают по формуле (3.6).

### Вариант Б

По варианту Б тело 1 является зоной I - го рода, а тела 2 и 3 – зонами II - го рода. Поэтому зональные уравнения для определения результирующего теплового потока для тела 1 и поток собственного излучения для тела 2 и тела 3 записываем, следуя формулам (2.28), (2.30) и (2.34)

$$\begin{cases} Q_1^{\text{д\`а\`с}} = Q_1^{\text{й\`о}} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\text{й\`о}} \cdot \Psi_{21} + Q_3^{\text{й\`о}} \cdot \Psi_{31} - Q_1^{\text{й\`о}}, \\ Q_2^{\text{н\`а\`а}} = \varepsilon_2 \cdot Q_2^{\text{й\`о}} - (1 - \varepsilon_2) \cdot Q_2^{\text{д\`а\`с}}, \\ Q_3^{\text{н\`а\`а}} = Q_3^{\text{й\`о}}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Третье уравнение системы (3.15) учитывает, что объемные зоны не отражают падающий на них поток.

Зная поток собственного излучения второй зоны, ее температуру рассчитывают по формуле (3.6).

Температуру объемной зоны II - го рода (тело 3) рассчитывают по формуле (2.32), в которой  $F_i$  в данном случае равна площади поверхности объемной зоны  $F_3 = F_1 + F_2$

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{Q_3^{\text{соб}}}{\varepsilon_3 \cdot \sigma_0 \cdot F_3}}. \quad (3.16)$$

### § 3.3. Решение модельной задачи резольвентным зональным методом

Расчет радиационного теплообмена (определение температур и результирующих тепловых потоков зон) резольвентным зональным методом выполняют в два этапа. На первом этапе находят разрешающие угловые коэффициенты решением системы (2.8). На втором этапе расчета для поверхностных и объемных зон I - го рода определяют результирующие тепловые потоки по явным формулам (2.36), а для поверхностных и объемных зон II - го рода находят потоки собственного излучения решением системы зональных уравнений (2.37).

## *Система тел №1*

По условию задачи (§ 3.1) система тел №1 состоит из двух твердых серых тел, разделенных диатермичной средой. При этом тело 1 – зона I - го рода, а тело 2 – зона II - го рода.

### *Определение разрешающих угловых коэффициентов*

Если тела разделены лучепрозрачной средой, то в этом случае обобщенные угловые коэффициенты равны угловым коэффициентам и система уравнений (2.8) для расчета разрешающих угловых коэффициентов принимает вид

$$\begin{cases} \Psi_{11} = \varphi_{11} + \varphi_{11} \cdot R_1 \cdot \Psi_{11} + \varphi_{12} \cdot R_2 \cdot \Psi_{21}, \\ \Psi_{22} = \varphi_{22} + \varphi_{22} \cdot R_2 \cdot \Psi_{22} + \varphi_{21} \cdot R_1 \cdot \Psi_{21}, \\ \Psi_{12} = \varphi_{12} + \varphi_{11} \cdot R_1 \cdot \Psi_{12} + \varphi_{12} \cdot R_2 \cdot \Psi_{22}, \\ \Psi_{21} = \varphi_{21} + \varphi_{22} \cdot R_2 \cdot \Psi_{21} + \varphi_{21} \cdot R_1 \cdot \Psi_{11}, \end{cases} \quad (3.17)$$

где  $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{22}, \Psi_{21}$  – разрешающие угловые коэффициенты излучения;  $\varphi_{11}, \varphi_{11}, \varphi_{11}, \varphi_{11}$  – угловые коэффициенты излучения (находят по формулам (1.45));  $R_1 = 1 - \varepsilon_1$  – отражательная способность первого тела;  $R_2 = 1 - \varepsilon_2$  – отражательная способность второго тела.

### *Определение параметров радиационного теплообмена*

Результирующий тепловой поток для тела 1 (зона I - го рода) и собственный тепловой поток для тела 2 (зона II - го рода) рассчитаем по формулам (2.36) и (2.37)

$$\begin{cases} Q_1^{\delta\acute{a}c} = \varepsilon_1 \cdot (Q_1^{\grave{n}\acute{a}} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\grave{n}\acute{a}} \cdot \Psi_{21}) - Q_1^{\grave{n}\acute{a}}, \\ Q_2^{\grave{n}\acute{a}} = \varepsilon_2 \cdot (Q_1^{\grave{n}\acute{a}} \cdot \Psi_{12} + Q_2^{\grave{n}\acute{a}} \cdot \Psi_{22}) - Q_2^{\delta\acute{a}c}. \end{cases} \quad (3.18)$$



Зная поток собственного излучения второй зоны, ее температуру рассчитывают по формуле (3.6).

### *Система тел №2*

По условию задачи (§ 3.1) система тел №2 состоит из двух твердых серых тел, разделенных ослабляющим газом (рис. 3.2).

#### *Определение разрешающих угловых коэффициентов*

Для системы двух серых тел, разделенных ослабляющей средой (см. рис.3.2), система уравнений для определения обобщенных разрешающих угловых коэффициентов имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{11} = \psi_{11} + \psi_{11} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{11} + \psi_{12} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{21}, \\ \Psi_{12} = \psi_{12} + \psi_{11} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{12} + \psi_{12} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{22}, \\ \Psi_{13} = \psi_{13} + \psi_{11} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{13} + \psi_{12} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{23}, \\ \Psi_{21} = \psi_{21} + \psi_{21} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{11} + \psi_{22} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{21}, \\ \Psi_{22} = \psi_{22} + \psi_{22} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{22} + \psi_{21} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{12}, \\ \Psi_{23} = \psi_{23} + \psi_{21} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{13} + \psi_{22} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{23}, \\ \Psi_{31} = \psi_{31} + \psi_{31} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{11} + \psi_{32} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{21}, \\ \Psi_{32} = \psi_{32} + \psi_{31} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{12} + \psi_{32} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{22}, \\ \Psi_{33} = \psi_{33} + \psi_{31} \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot \Psi_{13} + \psi_{32} \cdot (1 - \varepsilon_2) \cdot \Psi_{23}. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

При написании системы уравнений (3.19) учтено, что суммирование в правой части формулы (2.8) необходимо проводить только для поверхностных зон (тело 1 и тело 2), поскольку для объемной зоны (тело 3) отражательная способность равна нулю ( $R_3 = 0$ ).

## Определение параметров радиационного теплообмена

### Вариант А

По варианту А тела 1 и 3 являются зонами I - го рода, а тело 2 – зоной II - го рода. Поэтому зональные уравнения для определения потоков результирующего излучения для тел 1 и 3 и потока собственного излучения тела 2 следуя формулам (2.36) и (2.37) принимают вид

$$\begin{cases} Q_1^{\delta\acute{a}\zeta} = \varepsilon_1 \cdot (Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{21} + Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{31}) - Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}}, \\ Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} = \varepsilon_2 \cdot (Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{12} + Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{22} + Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{32}) - Q_2^{\delta\acute{a}\zeta}, \\ Q_3^{\delta\acute{a}\zeta} = \varepsilon_3 \cdot (Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{13} + Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{23} + Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{33}) - Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Зная поток собственного излучения второй зоны, ее температуру рассчитывают по формуле (3.6).

### Вариант Б

По варианту Б тело 1 является зоной I - го рода, а тела 2 и 3 – зонами II - го рода. Поэтому зональные уравнения для определения потока результирующего излучения для тела 1 и потоков собственного излучения тела 2 и тела 3 следуя формулам (2.36) и (2.37) принимают вид

$$\begin{cases} Q_1^{\delta\acute{a}\zeta} = \varepsilon_1 \cdot (Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{11} + Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{21} + Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{31}) - Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}}, \\ Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} = \varepsilon_2 \cdot (Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{12} + Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{22} + Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{32}) - Q_2^{\delta\acute{a}\zeta}, \\ Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} = \varepsilon_3 \cdot (Q_1^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{13} + Q_2^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{23} + Q_3^{\bar{n}\acute{a}\acute{a}} \cdot \Psi_{33}) - Q_3^{\delta\acute{a}\zeta}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Зная поток собственного излучения второй и третьей зон, их температуру рассчитывают по формулам (3.6) и (3.16) соответственно.

### **§ 3.4. Результаты расчета**

Для системы тел №1 и системы тел №2 (вариант А и вариант Б) некоторые результаты расчета параметров радиационного теплообмена (лучистые потоки и температуры) в зависимости от радиационных характеристик зон приведены в табл. 3.2 – 3.9 и на рис. 3.3 – 3.8.

Таблица 3.2. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №1 ( $\varepsilon_2 = 0,75$ ;  $\varepsilon_1 = \text{var}$ )

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$Q_1^{\dot{\gamma}\delta}$	$Q_2^{\dot{\gamma}\delta}$	$Q_2^{\text{нiá}}$	$T_2, \text{K}$
0,1	0,75	499592	1320457	983342	953
0,2	0,75	639592	1712457	1277342	1018
0,3	0,75	686258	1843123	1375342	1037
0,4	0,75	709592	1908457	1424342	1046
0,5	0,75	723592	1947657	1453742	1051
0,6	0,75	732925	1973790	1473342	1055
0,75	0,75	742258	1999923	1492942	1058
0,8	0,75	744592	2007260	1498445	1059
0,9	0,75	748481	2017346	1506009	1060
1,0	0,75	751592	2026057	1512542	1062

Таблица 3.3. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №1 ( $\varepsilon = 0,8$ ;  $\varepsilon_2 = \text{var}$ )

$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$Q_1^{\dot{\gamma}\delta}$	$Q_2^{\dot{\gamma}\delta}$	$Q_2^{\text{нiá}}$	$T_2, \text{K}$
0,8	0,1	744592	2006457	175446	1025
0,8	0,2	744592	2006457	378891	1045
0,8	0,3	744592	2006457	582337	1052
0,8	0,4	744592	2006457	785783	1055
0,8	0,5	744592	2006457	989228	1057
0,8	0,6	744592	2006457	1192674	1058
0,8	0,75	744592	2006457	1497842	1059
0,8	0,8	744592	2006457	1803011	1060
0,8	0,9	744592	2006457	2006457	1060
0,8	1,0	744592	2006457	2026057	1063

Таблица 3.4. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №2, Вариант А ( $\varepsilon_2 = 0,75$ ;  $\varepsilon_3 = 0,1$ ;  $\varepsilon_1 = \text{var}$ )

$\varepsilon_1$	$Q_1^{\dot{y}\delta}$	$Q_2^{\dot{y}\delta}$	$Q_3^{\dot{y}\delta}$	$Q_1^{\delta\dot{a}\dot{c}}$	$Q_3^{\delta\dot{a}\dot{c}}$	$T_2, K$
0	3403238	9507878	1319112	0	-28000	1564
0,1	2709459	8026248	1319112	217541	-245541	1499
0,2	2226944	6995792	1319112	368838	-396838	1448
0,3	1871945	6237658	1319112	480151	-508151	1407
0,4	1599813	5656495	1319112	565481	-593481	1373
0,5	1384565	5196814	1319112	632974	-660974	1344
0,6	1210054	4824128	1319112	687693	-715693	1320
0,75	1002515	4380909	1319112	752769	-780769	1288
0,8	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1277
0,9	840865	4035690	1319112	803456	-831456	1262
1,0	751592	3845039	1319112	831449	-859449	1247

Таблица 3.5. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №2, Вариант А ( $\varepsilon_1 = 0,8$ ;  $\varepsilon_3 = 0,1$ ;  $\varepsilon_2 = \text{var}$ )

$\varepsilon_2$	$Q_1^{\dot{y}\delta}$	$Q_2^{\dot{y}\delta}$	$Q_3^{\dot{y}\delta}$	$Q_1^{\delta\dot{a}\dot{c}}$	$Q_3^{\delta\dot{a}\dot{c}}$	$T_2, K$
0,1	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1258
0,2	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1269
0,3	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1273
0,4	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1274
0,5	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1275
0,6	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1276
0,7	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1277
0,75	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1277
0,9	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1277
1,0	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1278

Таблица 3.6. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №2 Вариант А

( $\varepsilon_1 = 0,8$ ;  $\varepsilon_2 = 0,75$ ;  $\varepsilon_3 = \text{var}$ )

$\varepsilon_3$	$Q_1^{\dot{y}\delta}$	$Q_2^{\dot{y}\delta}$	$Q_3^{\dot{y}\delta}$	$Q_1^{\delta\dot{a}\zeta}$	$Q_3^{\delta\dot{a}\zeta}$	$T_2, K$
0,1	944344	4256680	1319112	771009	-799009	1279
0,2	1065849	5700127	2638223	1257028	-1285028	1376
0,3	1144954	6707998	3957335	1573449	-1601449	1433
0,4	1198444	7454145	5276446	1787411	-1815411	1472
0,5	1235224	8030837	6595558	1934528	-1962528	1499
0,6	1260452	8491596	7914670	2035441	-2063441	1520
0,7	1277325	8869602	9233781	2102932	-2130932	1537
0,8	1287925	9186526	10552893	2145333	-2173333	1551
0,9	1293667	9457117	11872005	2168299	-2196299	1562

Таблица 3.7. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №2, Вариант Б ( $\varepsilon_2 = 0,75$ ;  $\varepsilon_3 = 0,1$ ;  $\varepsilon_1 = \text{var}$ )

$\varepsilon_1$	$Q_1^{\dot{y}\delta}$	$Q_3^{\dot{y}\delta}$	$Q_1^{\delta\dot{a}\zeta}$	$Q_3^{\delta\dot{a}\zeta}$	$T_2, K$	$T_3, K$
0,1	7699592	3887306	772000	-800000	1954	2061
0,2	3839592	2420506	772000	-800000	1670	1831
0,3	2552925	1931573	772000	-800000	1532	1730
0,4	1909592	1687106	772000	-800000	1447	1673
0,5	1523592	1540426	772000	-800000	1387	1635
0,6	1266258	1442640	772000	-800000	1342	1609
0,75	1008925	1344853	772000	-800000	1292	1581
0,9	837369	1279662	772000	-800000	1256	1561
1,0	751592	1247066	772000	-800000	1236	1551

Таблица 3.8. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №2, Вариант Б ( $\varepsilon_1 = 0,8$ ;  $\varepsilon_3 = 0,1$ ;  $\varepsilon_2 = \text{var}$ )

$\varepsilon_2$	$Q_1^3$	$Q_2^3$	$Q_3^3$	$Q_1^p$	$Q_3^p$	$T_2, K$	$T_3, K$
0,1	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1260	1573
0,2	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1271	1573
0,3	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1275	1573
0,4	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1277	1573
0,5	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1278	1573
0,6	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1278	1573
0,7	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1279	1573
0,8	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1279	1573
0,9	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1280	1573
1,0	944592	4259473	1320406	772000	-800000	1280	1573

Таблица 3.9. Тепловые потоки и температуры зон для системы тел №2, Вариант Б ( $\varepsilon_1 = 0,8$ ;  $\varepsilon_2 = 0,75$ ;  $\varepsilon_3 = \text{var}$ )

$\varepsilon_3$	$Q_1^3$	$Q_2^3$	$Q_3^3$	$Q_1^p$	$Q_3^p$	$T_2, K$	$T_3, K$
0,2	944592	4304323	1849783	772000	-800000	1282	1439
0,3	944592	4351737	2388898	772000	-800000	1286	1387
0,4	944592	4401939	2938612	772000	-800000	1290	1359
0,5	944592	4455184	3499888	772000	-800000	1294	1343
0,6	944592	4511757	4073809	772000	-800000	1298	1332
0,7	944592	4571979	4661600	772000	-800000	1302	1326
0,8	944592	4636217	5264647	772000	-800000	1307	1322
0,9	944592	4704884	5884528	772000	-800000	1311	1320
1	944592	4778457	6523048	772000	-800000	1317	1319

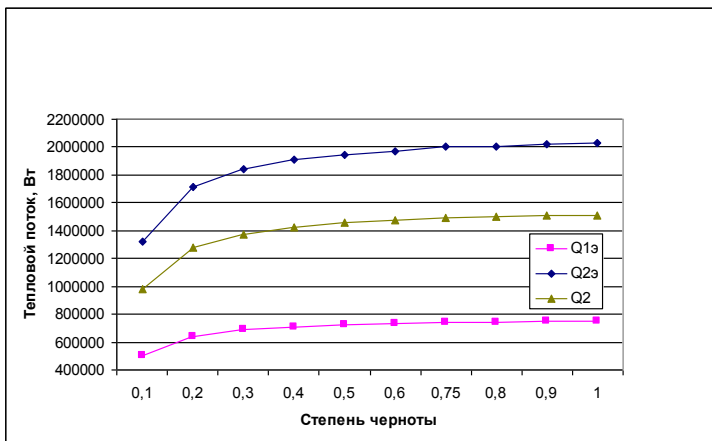


Рис.3.3. Изменение потоков эффективного излучения тела 1 ( $Q_1^{\dot{\gamma}\delta}$ ), тела 2 ( $Q_2^{\dot{\gamma}\delta}$ ) и потока собственного излучения тела 2 ( $Q_2^{\ddot{\eta}\acute{\alpha}}$ ) в зависимости от степени черноты тела 1 (для системы тел №1)

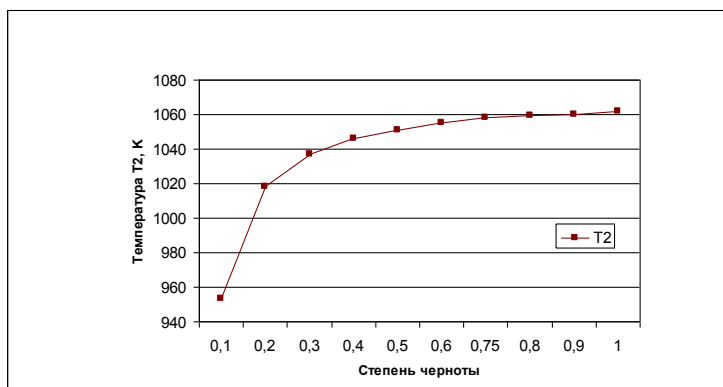


Рис.3.4. Изменение температуры тела 2 ( $T_2$ ) в зависимости от степени черноты тела 1 (для системы тел №1)



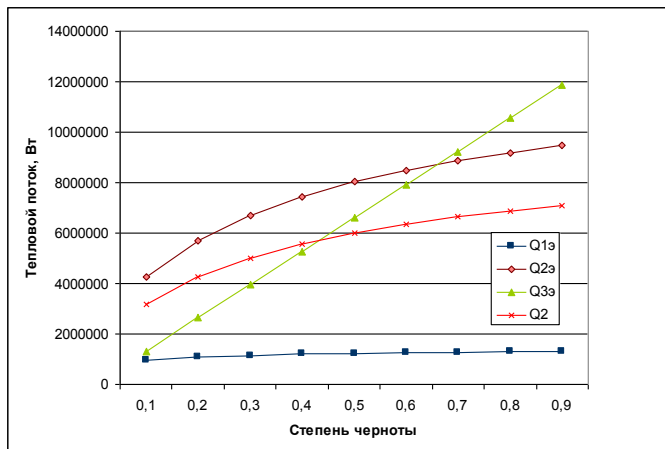


Рис.3.5. Изменение потоков эффективного излучения тела 1 ( $Q_1^{\acute{y}\acute{o}}$ ), тела 2 ( $Q_2^{\acute{y}\acute{o}}$ ) и тела 3 ( $Q_3^{\acute{y}\acute{o}}$ ) потока собственного излучения тела 2 ( $Q_2^{\grave{n}\acute{i}\acute{a}}$ ) в зависимости от степени черноты тела 3 (для системы тел №2, Вариант А)

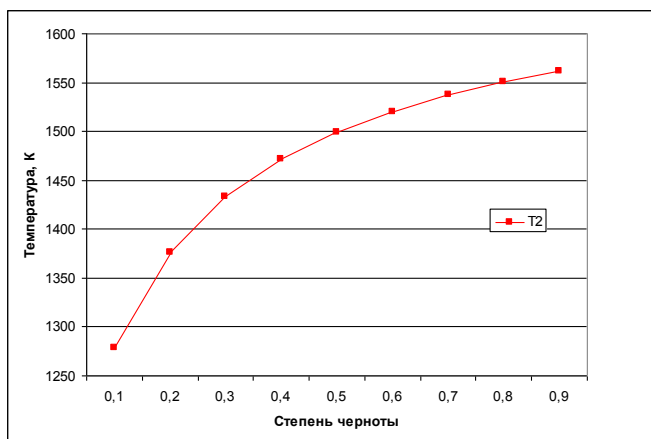


Рис.3.6. Изменение температуры тела 2 ( $T_2$ ) в зависимости от степени черноты тела 3 (для системы тел №2, Вариант А)

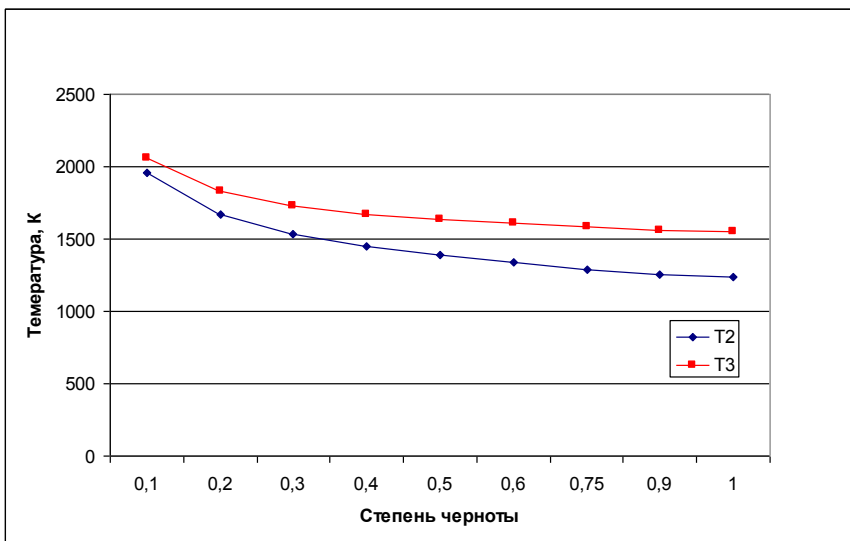


Рис.3.7. Изменение температуры тела 2 ( $T_2$ ) в зависимости от степени черноты тела 1 (для системы тел №2, Вариант Б)

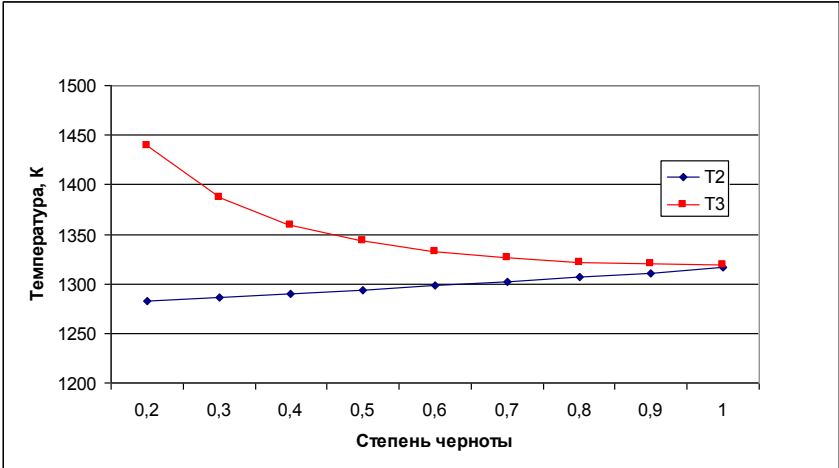


Рис.3.8. Изменение температуры тела 2 ( $T_2$ ) и тела 3 ( $T_3$ ) в зависимости от степени черноты тела 3 (для системы тел №2, Вариант Б)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Радиационный теплообмен – особый вид теплообмена по сравнению с другими способами переноса тепловой энергии. Во-первых, все тела с температурой выше нуля по шкале Кельвина ( $-273,15^{\circ}\text{C}$ ) имеют собственное излучение – излучение, обусловленное внутренней энергией тела. Во-вторых, перенос лучистой энергии осуществляется посредством распространения электромагнитных волн, для которых не требуется посредник в виде тела в любом фазовом состоянии (твердом, жидком или газообразном) и которые могут распространяться в газовых диатермичных или ослабляющих излучение средах и в вакууме.

Перед изложением основ зональных методов расчета радиационного теплообмена, в первой части пособия кратко были рассмотрены основные положения РТО: терминология и базовые понятия, виды лучистых потоков, основные законы излучения, инженерные методы расчета радиационного теплообмена в простых системах, состоящих из двух тел, разделенных диатермичной средой и системах из трех тел одно из которых является ослабляющим излучение газом.

Во второй части пособия в доступной форме дано объяснение идеи зональных методов расчета радиационного теплообмена в классической и резольвентной постановке, показаны преимущества и недостатки основных модификаций зональных методов.

Для закрепления теоретического материала в третьей части пособия на примерах расчета РТО в системах, состоящих из двух-трех тел, продемонстрирована практика применения зональных методов для систем с диатермичной и ослабляющей средой. В заключение в табличной и графической форме представлены результаты тестовых расчетов.

## Рекомендуемый библиографический список

1. Теория теплообмена: Учебник для технических университетов и вузов/ С.И. Исаев, И.А. Кожин, В.И. Кафанов и др.; под ред. А.И. Леонтьева.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 683 с.

2. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача: Учебник для вузов. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.

3. Металлургическая теплотехника. В 2-х томах. Т.1. Теоретические основы: Учебник для вузов/ В.А. Кривандин, В.А. Арутюнов, Б.С. Мاستрюков и др. – М.: Metallurgiya, 1986.– 484 с.

4. Арутюнов В.А. Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей./ В.А. Арутюнов, В.В. Бухмиров, С.А. Крупенников. – М.: Metallurgiya, 1990.

5. Маковский В.А., Лаврентик И.И. Алгоритмы управления нагревательными печами. – М.: Metallurgiya, 1977.– 184 с.

6. Зигель, Р. Теплообмен излучением./ Р. Зигель, Дж. Хауэлл – пер. с англ., - М.: Мир, 1975. – 934 с.

7. Теплообмен излучением: Справочник/ А.Г. Блох, Ю.А. Журавлев, Л.Н. Рыжков.– М.: Энергоатомиздат, 1991.– 432 с.

8. Бухмиров В.В., Крупенников С.А. Упрощенный зональный метод расчета радиационного теплообмена в поглощающей и излучающей среде // Изв. вузов. Черная металлургия, 1999, №1. – С.68-70.

9 Крупенников С.А. Применение модифицированного зонального метода для расчета сложного теплообмена // Изв. вузов. Черная металлургия, 1995, №5, С.46–49.

10. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен.- М.: Мир, 1976.- 616с.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА	5
§ 1.1. Основные понятия и определения	5
§ 1.2. Основные законы излучения абсолютно черного тела	14
§ 1.3. Излучение реальных тел. Закон Кирхгофа	18
§ 1.4. Лучистый теплообмен в замкнутой системе из двух серых тел, разделенных диатермичной средой	23
§ 1.5. Лучистый теплообмен между газом и окружающей его замкнутой серой оболочкой	28
РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ ЗОНАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА	35
§ 2.1. Постановка задачи расчета радиационного теплообмена	35
§ 2.2. Понятие зонального метода расчета	36
§ 2.3. Обобщенный и разрешающий угловые коэффициенты излучения	38
§ 2.4. Классический зональный метод расчета радиационного теплообмена	43
§ 2.5. Резольвентный зональный метод расчета радиационного теплообмена	49
§ 2.6. Модификации зонального метода расчета радиационного теплообмена	55
РАЗДЕЛ 3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА	68
§ 3.1. Постановка задачи	68
§ 3.2. Решение модельной задачи классическим зональным методом	72
§ 3.3. Решение модельной задачи резольвентным зональным методом	79

§ 3.4. Результаты расчета	83
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
Рекомендуемый библиографический список	93

**ЗОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
РАДИАЦИОННОГО И СЛОЖНОГО  
ТЕПЛООБМЕНА**

Составители: БУХМИРОВ Вячеслав Викторович  
СОЛНЫШКОВА Юлия Сергеевна

Редактор Т.В. Соловьева

Подписано в печать . . . . . Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать плоская. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд, л. 6,3 Тираж 100.

Заказ . . . . . ФГБОУВПО “Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина”

153003 Иваново, ул. Рабфаковская, 34.